Prof. Dr. Schulz-Baldes Julian Großmann

7. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 7.1 (Eigenschaften des Integrals)

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige nichtnegative Funktion, d. h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, für die

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

gilt. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

(b) Es sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche für alle $c, d \in [a, b]$

$$\int_c^d g(x)\,dx = 0$$

erfüllt. Zeigen Sie nun, dass dann $g(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Präsenzaufgabe 7.2 (Integrale)

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int x^2 \cos(x)\,dx\,, \quad \text{(b)} \quad \int e^{-x}\cos(5x)\,dx\,, \quad \text{(c)} \quad \int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\,dx\,.$$

Berechnen Sie die Integralwerte:

$$\text{(d)} \quad \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,dx\,, \quad \text{(e)} \quad \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

Präsenzaufgabe 7.3 (Integrale von trigonometrischen Funktionen)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx\,, \quad \text{(b)} \quad \int \frac{\tan(x)}{1+\sin(x)}\,dx\,.$$

Verwenden Sie in beiden Fällen dabei die Substitution $t(x) := \tan(x/2)$ und zeigen Sie zuerst:

$$\sin(x) = \frac{2t(x)}{1+t(x)^2}\,, \quad \cos(x) = \frac{1-t(x)^2}{1+t(x)^2}\,, \quad t'(x) = \frac{1+t(x)^2}{2}\,.$$

Präsenzaufgabe 7.4 (Integral einer Funktionenfolge)

Betrachten Sie die Folge von stetigen Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die punktweise Grenzfunktion und zeigen Sie dann, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx \;\neq\; \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx\,.$$

gilt. Was können Sie dann über das Konvergenzverhalten dieser Funktionenfolge aussagen?

Hausaufgabe 7.5 (Integrale) (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte:

$$\text{(a)} \quad \int_{-1}^{0} \frac{x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}\,dx\,, \quad \text{(b)} \quad \int_{3}^{8} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx\,, \quad \text{(c)} \quad \int_{\frac{3}{2}\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx\,.$$

Hausaufgabe 7.6 (Stammfunktionen) (8 Punkte)

Verwenden Sie die partielle Integration und passende Substitutionen, um Stammfunktionen der folgenden Funktionen herzuleiten:

$$\text{(a)} \quad x^n \ln(x)\,, \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{x\ln(x)}\,, \quad \text{(c)} \quad \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,, \quad \text{(d)} \quad \frac{1}{x^4+1}\,, \quad \text{(e)} \quad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,.$$

Hier ist $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 7.7 (Gerade und ungerade Funktionen) (6 Punkte)

Wir nennen eine Funktion f *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle x gilt und wir nennen f *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle x gilt.

(a) Es seien eine gerade stetige Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ und eine ungerade stetige Funktion $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx\,, \qquad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0\,.$$

(b) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} h(\sin(x))\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} h(\cos(x))\,dx\,, \qquad \int_{0}^{\pi} h(\sin(x))\cos(x)\,dx = 0\,.$$

(c) Es sei eine gerade stetige Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass es eine Stammfunktion F von f gibt, die ungerade ist.

Zusatzaufgabe 7.8 (Euler-Mascheroni-Konstante) (5 Bonuspunkte)

Sei $f\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton fallende und auf jedem endlichen Teilintervall von $[1, \infty)$ Riemann-integrierbare Funktion. Wir setzen $a_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx$. Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq a_n \leq f(1)$.

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq f(1)$.

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} f(x)\,dx$$

existiert. In diesem Fall gilt $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq f(1)$.

(d) Der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right)$$

existiert und es gilt $0 \leq \gamma \leq 1$. Hierbei nennt man γ die *Euler-Mascheroni-Konstante.*

Abgabe bis Dienstag, dem 31.05.2016 um 10:59 Uhr.