6. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 6.1 (Quadriken)

Eine reelle Quadrik im $\mathbb{R}^N$ lässt sich immer schreiben als

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x|Ax\rangle + 2\langle b|x\rangle + c = 0\}\,, \tag{1}$$

wobei A eine symmetrische Matrix, $b \in \mathbb{R}^N$ und c eine reelle Zahl ist. Man definiert die erweiterte Matrix und den erweiterten Vektor wie folgt:

$$A' := \begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x' := \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}\,.$$

Wir verwenden folgende Abkürzungen: Den Rang von A bezeichnen wir mit r, den Rang von A' mit r' und mit k bezeichnen wir die Anzahl der mit Vielfachheit gezählten positiven Eigenwerte von A.

(a) Bringen Sie die folgenden Quadriken in die Form von (1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 6x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 + 9 = 0\},\\
\mathcal{Q}_2 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + 8x_1x_2 - 10x_1 + 20x_2 - 35 = 0\},\\
\mathcal{Q}_3 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 + 6x_2 = 0\}.
\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie jeweils r, r', k und finden Sie heraus, welche Kurven die Quadriken beschreiben.

Präsenzaufgabe 6.2 (Riemann-Integral)

Welche der folgenden Funktionen sind Riemann-integrierbar?

(a) $k : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(b) $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1/x$.

(c) $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \cos(x)$.

(d) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}\,, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \text{ und } x = \frac{p}{q} \text{ mit gekürztem Bruch } \frac{p}{q} \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 6.3 (Riemann-Integral)

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig auf dem offenen Intervall (a,b). Zeigen Sie ausgehend von der Definition, dass f Riemann-integrierbar ist.

Hausaufgabe 6.4 (Cholesky-Zerlegung) (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass eine Matrix A genau dann positiv definit ist, wenn es eine invertierbare Matrix C mit $A = C^*C$ gibt.

Schreibt man eine positiv definite Matrix in der Form $A = LL^*$ mit linker unterer Dreiecksmatrix L mit positiven Diagonaleinträgen, so spricht man von einer *Cholesky-Zerlegung von* A. Wir betrachten diese Zerlegung nun für 2×2-Matrizen:

(b) Leiten Sie ein Verfahren zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung her, indem Sie das folgende Gleichungssystem durch schrittweisen Koeffizientenvergleich lösen:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & \overline{L_{21}} \\ 0 & L_{22} \end{pmatrix}.$$

(c) Begründen Sie, warum das obige Verfahren für eine positiv definite Matrix A immer durchführbar ist und dass die Cholesky-Zerlegung von A eindeutig ist.

(d) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 6.5 (Affine Abbildungen) (8 Punkte)

Es seien die folgenden Abbildungen $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben:

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie F^{-1} und $G \circ F$. Welche der Abbildungen F, G und $G \circ F$ sind euklidische Bewegungen?

(b) Untersuchen Sie F, G und $G \circ F$ nach Fixpunkten.

(c) Geben Sie die zu F und G gehörenden linearen Abbildungen $F', G' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{1+3})$ an, wie sie in der Vorlesung konstruiert wurden.

(d) Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Fixpunkten von F und den Eigenvektoren von F'?

Hausaufgabe 6.6 (Riemann-Integral) (4 Punkte)

Zeigen Sie explizit durch Berechnung von Ober- und Untersummen, dass die unstetige Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ -1\,, & x < 0 \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist.

Abgabe bis Dienstag, dem 24.05.2016 um 10:59 Uhr.