Prof. Dr. Schulz-Baldes Julian Großmann

5. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 5.1 (Positiv definite Matrizen)

Es sei die folgende Matrix $M \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob M positiv definit oder positiv semidefinit ist. Bestimmen Sie eine Matrix N mit $N^2 = M$. Kann N selbstadjungiert bzw. unitär gewählt werden?

Präsenzaufgabe 5.2 (Singulärwertzerlegung)

Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. unitäre Matrizen U, W und nichtnegative Zahlen $\mu_1 \geq \mu_2$ derart, dass gilt:

$$A = W \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix} U.$$

Präsenzaufgabe 5.3 (Differentialgleichungssystem)

Es sei das folgende System linearer Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_2' &= x_1 + 2x_3 \\ x_3' &= -2x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die allgemeine reelle Lösung dieses Systems.

Präsenzaufgabe 5.4 (Negativ definite Matrizen)

(a) Beweisen Sie das Hurwitz-Kriterium für negativ definite Matrizen:

Eine Matrix $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{C})$ ist genau dann negativ definit, wenn $(-1)^K \det(A_K) > 0$ für alle $K \in \{1, \ldots, N\}$ gilt. Hier stellen $\det(A_K) = \det(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq K}$ die *führenden Hauptminoren* dar.

(b) Zeigen Sie nun, dass

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

negativ definit ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel einer indefiniten Matrix, deren führenden Hauptminoren alle nichtnegativ sind.

Hausaufgabe 5.5 (Positiv definite Matrizen) (4 Punkte)

Für welche Zahlen $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen positiv definit?

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}, \quad N(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 5.6 (Anfangswertproblem) (8 Punkte)

Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$y'' = ay, \quad y(0) = y_0, \; y'(0) = v_0$$

für eine reellwertige Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Anfangswerten $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Führen Sie die Differentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung über, indem Sie neue Koordinaten $x_1 := y$ und $x_2 := y'$ einführen. Zeigen Sie dann, dass für $x = (x_1, x_2)^T$ das Anfangswertproblem die Form

$$x' = Ax \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \; x(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

annimmt.

(b) Berechnen Sie A^2 und schreiben Sie e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ als Potenzreihe auf.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung x^L des Anfangswertproblems (1) für den Fall $a > 0$ lautet:

$$x^L(t) = \begin{pmatrix} y_0 \cosh(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t) \\ \omega y_0 \sinh(\omega t) + v_0 \cosh(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega := \sqrt{a}.$$

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung x^L des Anfangswertproblems (1) für den Fall $a = 0$ lautet:

$$x^L(t) = \begin{pmatrix} y_0 + v_0 t \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

(e) Zeigen Sie, dass die Lösung x^L des Anfangswertproblems (1) für den Fall $a < 0$ lautet:

$$x^L(t) = \begin{pmatrix} y_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega y_0 \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega := \sqrt{-a}.$$

Hausaufgabe 5.7 (Polarisierung) (8 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt *Sesquilinearform auf* V, wenn für alle $u, v, w \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

(1) $s(u, av + bw) = as(u, v) + bs(u, w)$

(2) $s(au + bv, w) = \overline{a}s(u, w) + \overline{b}s(v, w)$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spricht man auch einfach von einer Bilinearform. Die Abbildung $q : V \to \mathbb{K}$, $q(v) := s(v, v)$ heißt die durch s *erzeugte quadratische Form.*

(a) Zeigen Sie nun für einen komplexen Vektorraum V und eine Sesquilinearform s die Polarisierungsidentität:

$$s(u,v) = \frac{1}{4}\left[q(u+v) - q(u-v) - iq(u+iv) + iq(u-iv)\right].$$

(b) Zeigen Sie nun für einen reellen Vektorraum V und eine Bilinearform s, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) s ist symmetrisch, d.h. $s(u,v) = s(v,u)$ für alle $u, v \in V$

(ii) $s(u,v) = \frac{1}{4}\left[q(u+v) - q(u-v)\right]$

Abgabe bis Mittwoch, dem 18.05.2016 um 10:00 Uhr im Briefkasten.
Alternativ auch ausnahmsweise in der Vorlesungspause um 9 Uhr.