4. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 4.1 (Projektionen)

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Bessel'schen Ungleichung, dass für jede orthogonale Projektion P gilt:

$$\langle v|v\rangle \geq \langle v|Pv\rangle \quad \text{für alle } v \in V\,.$$

Für einen Unterraum $U \subset V$ bezeichne P_U die eindeutig bestimmte orthogonale Projektion mit $\mathrm{Ran}(P_U) = U$. Zeigen Sie nun für zwei Unterräume U und W:

(b) $Q := P_U P_W$ ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $P_U P_W = P_W P_U$ gilt. In diesem Fall ist $Q = P_{U\cap W}$.

(c) U und W sind genau dann orthogonal, wenn $P_U P_W = 0$ oder $P_W P_U = 0$ gilt.

(d) $R := P_U + P_W$ ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $U \perp W$ gilt. In diesem Fall gilt dann $R = P_{U\oplus W}$. *Hinweis: Verwenden Sie Teil (a).*

Präsenzaufgabe 4.2 (Matrixexponentialfunktion)

Wir betrachten für $N \geq 1$ Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ im Allgemeinen falsch ist.

(b) Zeigen Sie, dass $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ gilt, wenn die Matrizen A, B kommutieren.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in Analysis I (d.h. $N = 1$) vor.

(c) Zeigen Sie mit dem Ergebnis von Teil (b), dass e^A regulär ist und für die Inverse gilt:

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}\,.$$

Präsenzaufgabe 4.3 (Jordansche Normalform)

Es seien die folgenden komplexen Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie jeweils für A und B die Eigenwerte und die verallgemeinerten Eigenvektoren (auch Hauptvektoren genannt). Berechnen Sie dann aus den Transformationsmatrizen jeweils eine jordansche Normalform für A und B.

bitte wenden

Hausaufgabe 4.4 (Nilpotente Abbildungen) (6 Punkte)

Betrachten Sie quadratische Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Summe zweier nilpotenter Matrizen ist nilpotent.

(b) Das Produkt zweier nilpotenter Matrizen ist nilpotent.

(c) Die Summe zweier kommutierender, nilpotenter Matrizen ist nilpotent.

(d) Das Produkt zweier kommutierender, nilpotenter Matrizen ist nilpotent.

(e) Ist $S \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{K})$ nilpotent, so gilt $S^N = 0$.

Hausaufgabe 4.5 (Jordansche Normalform) (8 Punkte)

Es sei die komplexe Matrix A gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis aus verallgemeinerten Eigenvektoren von A und eine jordansche Normalform von A.

Hausaufgabe 4.6 (Spektraldarstellung) (4+2 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung, welche diagonalisierbar ist. Mit $\mathrm{Spec}(T)$ bezeichnen wir die Menge der Eigenwerte von T.

(a) Zeigen Sie, dass

$$P_\lambda := \prod_{\mu \in \mathrm{Spec}(T) \setminus \{\lambda\}} \frac{T - \mu \mathbf{1}_V}{\lambda - \mu}$$

eine idempotente Abbildung ist, die den Eigenraum zum Eigenwert λ als Bild besitzt. Zeigen Sie weiterhin, dass für den Kern gilt:

$$\mathrm{Kern}(P_\lambda) = \mathrm{span}\left\{ \bigcup_{\mu \in \mathrm{Spec}(T) \setminus \{\lambda\}} E_T(\mu) \right\},$$

wobei $E_T(\mu) := \mathrm{Kern}(T - \mu \mathbf{1}_V)$ den jeweiligen Eigenraum bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass T die folgende Form annimmt:

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(T)} \lambda P_\lambda \,.$$

(c) **(2 Bonuspunkte)** Wenn V ein Skalarprodukt trägt, dann besitzt jede *normale* lineare Abbildung eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Verwenden Sie dieses Wissen sowie Teil (a) und (b), um Satz 4.46 (Projektionsoperatorversion des Spektralsatzes) aus der Vorlesung zu beweisen.

Abgabe bis Dienstag, dem 10.05.2016 um 10:59 Uhr.