2. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 2.1 (Eigenwerte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{K})$:

(a) Wenn $\det(A) \neq 0$ und λ ein Eigenwert von A ist, dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

(b) Wenn alle Zeilensummen 1 sind, dann ist 1 ein Eigenwert von A.

(c) Wenn A eine Blockmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{mit } B \in \mathrm{Mat}(K \times K, \mathbb{K}), \; D \in \mathrm{Mat}(M \times M, \mathbb{K}),$$

ist, so sind die Eigenwerte von A genau die Eigenwerte von B und D zusammen.

(d) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^m ein Eigenwert von A^m für jedes $m \in \mathbb{N}$.

(e) Wenn A nilpotent ist, d.h. $A^m = 0$ für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$, dann ist 0 der einzige Eigenwert von A.

(f) Wenn A idempotent ist, d.h. $A^2 = A$, dann können höchstens 0 und 1 Eigenwerte sein.

Präsenzaufgabe 2.2 (Diagonalisieren)

Wir betrachten die folgenden komplexen Matrizen, die sogenannten *Pauli-Matrizen*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der gegebenen Matrizen.

(b) Warum sind die Matrizen diagonalisierbar?

(c) Diagonalisieren Sie die Matrizen und geben Sie die Transformationsmatrizen an.

(d) Berechnen Sie e^A, e^B und e^C.

Hausaufgabe 2.3 (Charakteristisches Polynom) (4+1 Punkte)

(a) Berechnen Sie für alle $N \geq 2$ und beliebige $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{K}$ das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -c_N & -c_{N-1} & \cdots & \cdots & -c_2 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass jedes Polynom vom Grad N mit Leitkoeffizient $(-1)^N$ das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{K})$ sein kann.

Hausaufgabe 2.4 (Diagonalisieren) (4+4+2 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob folgende Matrizen als Abbildungen auf reellen Vektorräumen diagonalisierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls eine geeignete Basiswechselmatrix hin zu einer Diagonalform (d.h. eine Matrix T_i derart, dass $T_i^{-1}A_iT_i$ diagonal ist).

(i) $$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$ (ii) $$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

(iii) $$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 6 & -5 \end{pmatrix},$$ (iv) $$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sind die Matrizen A_1, A_2, A_3, A_4 aufgefasst als Abbildungen auf komplexen Vektorräumen diagonalisierbar? Bestimmen Sie auch hier die Transformationsmatrizen.

(c) Berechnen Sie e^{A_1} und e^{A_2}.

Hausaufgabe 2.5 (Charakteristisches Polynom) (5 Punkte)

Es sei $M \geq N$ und $A \in \mathrm{Mat}(M \times N, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(N \times M, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome von AB und BA gilt:

$$p_{AB}(z) \;=\; (-z)^{M-N} p_{BA}(z).$$

Zusatzaufgabe 2.6 (Differenzieren der Determinante) (5 Bonuspunkte)

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) Betrachte eine Matrix $B(t) := \big(S_1(t), \dots, S_N(t)\big) \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{R})$, deren Spalten $S_j(t)$ differenzierbar von $t \in \mathbb{R}$ abhängen. Zeigen Sie dann die folgende Produktregel:

$$\frac{d}{dt}\det(B(t)) = \det\big(S_1'(t), S_2(t), \dots, S_N(t)\big) + \cdots + \det\big(S_1(t), \dots, S_{N-1}(t), S_N'(t)\big)\,.$$

Die Ableitung für eine Spalte ist komponentenweise zu verstehen.

(b) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{R})$. Wir bezeichnen mit $A(j) = \check{A}^{(j,j)}$ die $(N-1) \times (N-1)$-Matrix, die durch Streichen der j-ten Spalte und j-ten Zeile aus A entsteht. Zeigen Sie, dass dann für das charakteristische Polynom gilt:

$$\frac{d}{dt} p_A(t) = -\sum_{j=1}^{N} p_{A(j)}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$