HA 2

Zwei Normen sind äquivalent, wenn Konstanten $c, C > 0$ existieren mit

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_\infty \leq C \cdot \|v\|_1 \quad \text{für alle } v \in V. \qquad (*)$$

Betrachte nun die Funktionen $v_n(x) := x^n$:

$$\|v_n\|_1 = \int_0^1 |v_n(x)|\, dx = \underline{\frac{1}{n+1}}$$

$$\|v_n\|_\infty = |v_n(1)| = \underline{1}$$

Nach $(*)$ müsste gelten

$$\|v\|_\infty \leq C \cdot \|v\|_1 \quad ,$$

also $1 \leq C \cdot \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow \quad C \geq n+1 \quad \Rightarrow \quad C = \infty$. Keine Zahl $C \in \mathbb{R}$ möglich.

$\Rightarrow$ Normen sind nicht äquivalent.