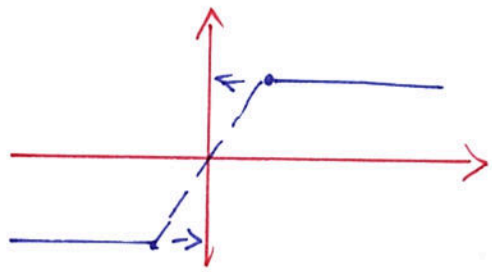
A6.4

$\mathcal{C}(I) := \{ v : I \to \mathbb{R} \mid v \text{ stetig} \}$, $I := [-1, 1]$

(a) Beh: $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig, wobei $\|v\|_2 := \left[\int_{-1}^{1} |v(t)|^2 dt \right]^{1/2}$

Bew: Wähle Funktionenfolge $f_n(t) := \begin{cases} -1 & , t \in [-1, -\frac{1}{n}) \\ nt & , t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & , t \in (+\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$



$(f_n) \subseteq \mathcal{C}(I)$ ist Cauchyfolge, denn: $(m \geq n)$

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{\leq 2}^2 dt \leq 4 \cdot \frac{2}{n} \xrightarrow{n,m \to \infty} 0$$

Weiterhin konvergiert f_n punktweise gegen f mit

$$f(t) := \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 . \end{cases}$$

Ann: Es existiert ein $g \in \mathcal{C}(I)$ mit $\|f_n - g\|_2 \to 0$.

Dann gilt $\int_{-1}^{+1} |f_n(t) - g(t)|^2 dt \to 0$ und somit zwangsläufig

$\forall_{t \in I}\ |f_n(t) - g(t)| \to 0$. Da der punktweise Grenzwert eindeutig ist,

muss schon $f(t) = g(t)$ gelten, d.h. $g = f \notin \mathcal{C}(I)$.

$\Rightarrow (f_n)$ konvergiert nicht $\Rightarrow (\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig. $\square$

(b) <u>Beh:</u> $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig

<u>Bew:</u> Es sei $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(I)$ eine beliebige Cauchyfolge, d.h.

⌈ Allgemeines Rezept: ① Konstruiere Grenzwert f
② Zeige $f \in \mathcal{C}(I)$
③ Zeige $\|f - f_n\| \to 0$ ⌋

$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n,m \geq N}{\forall} \ \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ und somit ist

auch $|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $t \in I$.

$\Rightarrow (f_n(t)) \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$

$\overset{\mathbb{R} \text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ $f(t) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)$ für alle $t \in I$ definiert Funktion $f: I \to \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|f_n - f_m\| < \varepsilon/2$. $(\forall m,n \geq N)$
Wähle $t \in I$ beliebig und dazu $M \in \mathbb{N}$, $M \geq N$ so groß, dass
$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq M$.

Dann gilt:

$$|f_n(t) - f(t)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f_n(t) - f_M(t)| + |f_M(t) - f(t)|$$

$$\leq \|f_n - f_M\|_\infty + |f_M(t) - f(t)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n \geq M$$

Da t beliebig gilt auch $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ und somit
konvergiert f_n gegen f in der Supremumsnorm.

Da $f_n \to f$ gleichmäßig ist f auch stetig, d.h. $f \in \mathcal{C}(I)$

$\Rightarrow (\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig $\square$