Die Menge E_3 ist kompakt:

Da $E_3 \subseteq \overline{B_{\frac{\pi^2}{6}}(0)}$, ist E_3 beschränkt.

Es sei nun $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_3$ eine beliebige Folge in E_3.
Für alle $i \in \mathbb{N}$ erhält man also eine Folge

$$(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$$, die nach Vorraussetzung beschränkt ist.

Das Diagonalverfahren liefert nun eine Teilfolge n_ν mit $n_{\nu+1} > n_\nu$ derart, dass

$$\lim_{\nu\to\infty} x_i^{(n_\nu)} =: \underline{x_i}$$ für alle $i \in \mathbb{N}$ existiert.

Offensichtlich gilt $|x_i| \leq \frac{1}{i}$, so dass $x := (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E_3$.
Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $j \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{4}{i^2} < \varepsilon$$ (möglich, da die Reihe konvergiert).

Dann gilt: „n_ν“

$$\| x^{(n_\nu)} - x \|_{\ell^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n_\nu)} - x_i|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{j} |x_i^{(n_\nu)} - x_i|^2 + \sum_{i=j+1}^{\infty} |x_i^{(n_\nu)} - x_i|^2$$

(*) $\left[(a-b)^2 \leq a^2 + 2|a|\cdot|b| + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \right]$

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{j} |x_i^{(n_\nu)} - x_i|^2 + 2\sum_{i=j+1}^{\infty} |x_i^{(n_\nu)}|^2 + 2\cdot\sum_{i=j+1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{j} |x_i^{(n_\nu)} - x_i|^2}_{\nu\to\infty \to 0} + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{4}{i^2}}_{<\varepsilon}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, gilt $\| x^{(n_\nu)} - x \|_{\ell^2} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$. □