Jordan-Normalform berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Eigenwerte bestimmen:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 6 & -2 \\ & 1-\lambda & -3 & 2 \\ & & 1-\lambda & 0 \\ & & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ & 1-\lambda & 0 \\ & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 \cdot (2-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$ Vielfachheit 3 und $\lambda_2 = 2$ Vielfachheit 1

2. Schritt: Eigenräume bestimmen:

$\underline{\lambda = 1}$

$$\operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: v_1}$$

(da $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ direkt auf $b = c = d = 0$ führt)

$\leadsto$ geometrische Vielfachheit 1

$\underline{\lambda = 2}$

$$\operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: v_2}$$

$\leadsto$ geometrische Vielfachheit 1

3. Schritt: Hauptvektoren bestimmen:

Für Eigenwerte mit geometrischer Vielfachheit echt kleiner der algebraischen müssen wir entsprechend viele Hauptvektoren finden.

In unserem Fall sind das zwei Stück für $\lambda_1 = 1$:

$$\operatorname{Kern} (A - \lambda_1 \cdot \mathbb{1})^2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $\operatorname{Kern}(A-\lambda_1 \mathbb{1})^2 = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

Und: $\operatorname{Kern}(A-\lambda_1 \mathbb{1})^3 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-4&2\\0&0&0&0\\0&0&-2&1\end{pmatrix} = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$

Da die alg. Vielfachheit von λ_1 drei beträgt, haben wir hiermit alle notwendige Kerne berechnet.

Man beginnt nun mit der Wahl der Hauptvektoren mit denjenigen der größten Stufe, d.h $w_3 \in \operatorname{Kern}(A-\lambda_1 \mathbb{1})^3$ aber auch $w_3 \notin \operatorname{Kern}(A-\lambda_1\mathbb{1})^2$!

Wir setzen dann sukzessive: $\boxed{w_k := (A-\lambda_1 \mathbb{1})\, w_{k+1} \quad \text{für } k \in \{1,\dots,2\}}$

In unserem Fall.

Wähle: $w_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich $w_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

4. Schritt: Transformationsmatrizen aufstellen

In der Transformationsmatrix stehen die Hauptvektoren in der gewählten Reihenfolge, d.h:

$$T = (\underbrace{w_1, w_2, w_3}_{\text{für } \lambda_1}, \underbrace{v_2}_{\text{für } \lambda_2})$$

Also: $T = \begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&2&1\end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix}1&-2&-8&4\\0&1&4&-2\\0&0&1&0\\0&0&-2&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow J_A = T^{-1} A\, T = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Übung:

$$B = \begin{pmatrix}2&0&1\\-1&3&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$