Aufgabe 40 (b)

$F: W \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x\cdot y\cdot z$ mit $W = \mathbb{R}^3_{>0} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0 \right\}$

Mannigfaltigkeit: $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2x\cdot y + 2yz + 2xz - 54$

0 ist regulärer Wert und $M := \varphi^{-1}(0)$ 2-dim MF.

Betrachte $f := F|_{W\cap M}$

Also:

$(x,y,z) \in W \cap M$ ist genau dann kritischer Punkt von f, wenn:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ y+x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 2x\cdot y + 2yz + 2xz - 54 \quad (\mathrm{IV})$$

1. Fall: $x = y = z \overset{\mathrm{I}}{\Rightarrow} x^2 = 4\lambda \cdot x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}x$

Aus IV folgt: $x = \pm 3 \Rightarrow$ Extremstelle $p_1 = (3,3,3)$ mit $F(p_1) = \underline{27}$

2. Fall: Gilt $(x \neq y)$ oder (analog für $x \neq z$ bzw $y \neq z$).

Also OBdA $x \neq y$:

$$z(y-x) = zy - zx \overset{\mathrm{I,II}}{=} 2\lambda(y+z-(x+z)) = 2\lambda(y-x)$$

$\Rightarrow z = 2\lambda$.

Aus I folgt dann: $yz = z(y+z) = yz + z^2 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z \notin W\cap M$.

$\Rightarrow$ Auf $W \cap M$ hat f nur p_1 als Extremstelle

Betrachtung der Randwerte

Nach Aufgabe: $x,y,z \geq 1$.

OBdA: $x = 1$ (y,z analog nach Symmetrie)

Bestimme Extremstellen $G: \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$, $(y,z) \mapsto F(1,y,z)$

analog zu eben!

Mannigfaltigkeit: $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y,z) \mapsto 2y + 2yz + 2z - 54$

Betrachte also $g := G|_{\tilde{W}\cap\tilde{M}}$ mit $\tilde{M} = \tilde{\varphi}^{-1}(0)$

<u>Also:</u> $(y,z) \in \mathbb{R}^2_{>0} \cap \tilde{M}$ ist genau dann kritischer Punkt von g, wenn

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} 1+z \\ y+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 2y + 2yz + 2z - 54 = 0$$

<u>Fall (a)</u> $z = y \Rightarrow z = 2\mu(1+z)$ und $4z + 2z^2 - 54 = 0$

$\Rightarrow z = \sqrt{28} - 1 \approx 4.3 \quad \Rightarrow \quad F(1, \sqrt{28}-1, \sqrt{28}-1) \approx 18.4 < 27$

<u>Fall (b)</u> $z \neq y \Rightarrow z = 0$ (analog zu eben)

<u>Weitere Randbetrachtung:</u>

OBdA: und noch $y = 1$, Also folgende Funktion: $H: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $H(z) = F(1,1,z)$

Nebenbedingung impliziert nun: $2 + 2z + 2z - 54 = 0 \Rightarrow z = 13$

$F(1,1,13) = \underline{13}$

<u>Schlussfolgerung:</u>

Da Minimum und Maximum auf $W \cap M \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 1 \right\}$, also auf $M \cap \mathbb{R}^3_{\geq 1}$, angenommen werden (<u>Warum genau??</u>)

↳ Bitte nachdenken!

ist bei p_1 mit $F(p_1) = 27$ das maximale Volumen und bei $(1,1,13)$ das minimale Volumen von 13.