23 (c)

System 1. Ordnung:

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = y_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{y}_n = -a_{n-1} y_n - a_{n-2} y_{n-1} - \dots - a_1 y_2 - a_0 y_1$$

k-dim.

k×k Matrix

$\rightsquigarrow$ k·n-dim System 1. Ordnung

Setze $Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Dann ist das System gegeben durch:

$$\dot{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \mathbb{1} & & \\ & & & \ddots & \mathbb{1} \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{(k\cdot n)\times(k\cdot n)\text{-Matrix}} Y \quad =: \underline{\mathcal{B} Y}$$

$e^{\mathcal{B}t}$ bzw. $e^{\mathcal{B}(t-t_0)}$ sind Fundamentalmatrizen.

Ein bel. Fundamentalsystem ist durch $\Phi(t) = e^{\mathcal{B}(t-t_0)} T$ gegeben. (Es gilt also $\Phi(t_0) = T$)

invertierbar

$$
\begin{aligned}
W(t) &= \det(\Phi(t)) = \det(T)\cdot\det\left(e^{\mathcal{B}(t-t_0)}\right) \\
&= \det(\Phi(t_0))\, e^{\mathrm{Spur}(\mathcal{B}(t-t_0))} \qquad \text{(siehe (a) bzw. (b))} \\
&= W(t_0)\, e^{(t-t_0)\,\mathrm{Spur}(\mathcal{B})} \\
&= \underline{\underline{W(t_0)\cdot e^{-(t-t_0)\,\mathrm{Spur}(a_{n-1})}}}
\end{aligned}
$$