Aufgabe 18 (c)

Es sei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm ausgestattet und A eine symmetrische Matrix über $\mathbb{R}$.

Beh: $\|A\| = |\lambda_{max}|$. Dabei steht λ_{max} für den betragsmäßig größten Eigenwert von A.

Bew: Da λ_{max} Eigenwert ist, existiert ein Eigenvektor v mit $\|v\| = 1$, sodass

$$Av = \lambda_{max} v \ . \tag{1}$$

Daraus folgt sofort $\|A\| \geq |\lambda_{max}|$.

Andererseits ist A als symmetrische Matrix diagonalisierbar, d. h. es existieren Transformationsmatrizen U und U^{-1}, welche sogar orthogonal sind, und eine Diagonalmatrix D, so dass gilt:

$$A = UDU^{-1} = UDU^T \ . \tag{2}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \left\langle UDU^T x \, , UDU^T x \right\rangle = \|Dy\|^2 \ , \text{ mit } y := U^T x \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i y_i|^2 \ , \text{ mit } \{\lambda_i\} \text{ Eigenwerte mit Vielfachheiten aufgelistet.} \\
&\leq |\lambda_{max}|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = |\lambda_{max}|^2 \, \|y\|^2 = |\lambda_{max}|^2 \, \|x\|^2 \ .
\end{aligned}$$

Ziehen wir die Wurzel und bilden wir das Supremum, so erhalten wir:

$$\|A\| \leq |\lambda_{max}| \ . \tag{3}$$

Also im Gesamten wirklich: $\|A\| = |\lambda_{max}|$. □

Bemerkung: Wir haben für die zweite Ungleichung die genaue Form der euklidischen Norm ausgenutzt und in der Tat gilt die Aussage nicht für eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Die erste Ungleichung, also $\|A\| \geq |\lambda_{max}|$, gilt jedoch für jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ und der damit induzierten Operatornorm.