Lösung zu Aufgabe 16

Für das k-dimensionale System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{x} = Ax + b \ , \ \text{mit } x(0) = v \ , \tag{1}$$

wobei A eine konstante Matrix ist, können wir das Verfahren *Lösung durch integrierenden Faktor* analog zum eindimensionalen Fall durchführen (gute Übung!) und erhalten die Formel

$$x(t) = e^{tA}v + e^{tA}\int_0^t e^{-\tau A}b(\tau)\,d\tau \ . \tag{2}$$

Vergleiche diese mit der Formel für den allgemeinen Fall (d. h. nicht-autonomes System) und denke an den Zusammenhang zwischen Matrixexponentialfunktion und Fundamentalmatrix.

16 (a)

Es ist nur die Formel (2) anzuwenden und dabei sollten bestensfalls keine Fehler gemacht werden. Berechne die Matrixexponentialfunktion nach dem Verfahren der Vorlesung, d. h. man versucht A zu diagonalisieren.

Man erhält dann

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1+e^{-t} \\ 1-e^{2t} & e^{2t} & -1+e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \tag{3}$$

und damit auch

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}-1 \\ e^{2t}(1+t)-1 \\ e^{-t} \end{pmatrix} \ . \tag{4}$$

16 (b)

Analog nun Teil (b):

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t}\left(-1+e^{t}\right) & e^{2t}\left(-1+e^{t}\right) \\ e^{2t}\left(-1+e^{t}\right) & e^{3t} & e^{2t}\left(-1+e^{t}\right) \\ -e^{2t}\left(-1+e^{t}\right) & -e^{2t}\left(-1+e^{t}\right) & -e^{2t}\left(-2+e^{t}\right) \end{pmatrix} \tag{5}$$

und

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(-1+2e^{t}-7e^{2t}+10e^{3t}-2t\right) \\ \frac{1}{4}\left(1+2e^{t}-9e^{2t}+10e^{3t}+2t\right) \\ -\frac{1}{2}e^{t}\left(3-8e^{t}+5e^{2t}\right) \end{pmatrix} \ . \tag{6}$$