Aufgabe 10 (c)

Es ist folgende Differentialgleichung zu betrachten:

$$y' = \sin(x) + y^2 \ , \quad y(0) = 1 =: y_0 \ . \tag{1}$$

Wir definieren zur besseren Übersicht die Funktionen $w(x,y) := \sin(x) + y^2$ und $v(y) := y^2$ und wenden das Iterationsverfahren von Picard an.

Dieses liefert im ersten Schritt:

$$\alpha_1(x) = y_0 + \int_0^x w(s, y_0)\, ds = 2 + x - \cos(x) \ . \tag{2}$$

Frage: Wie viele Schritte benötigt man höchstens um eine Genauigkeit von 0.01 zu garantieren?

Antwort: Diese Frage lässt sich nur in einem metrischen Raum sinnvoll beantworten, welche bei Betrachtungen von Differentialgleichungen immer der Raum der stetigen Funktionen $C(I,J)$ von einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ in ein Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ ausgestattet mit der Supremumsmetrik $d(f,g) := \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$ ist.

Die Intervalle I, J müssen nun so klein gewählt werden, dass der Operator

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} \ : \ C(I,J) \longrightarrow C(I,J) \\ &\mathcal{F}(f)(x) := y_0 + \int_0^x w(s, f(s))\, ds \end{aligned}$$

zu einer wohldefinierten Abbildung auf diesem Raum wird und zusätzlich eine Kontraktion bildet. Beides ist immer möglich, wenn unsere Vektorfelder w bzw. v einer lokalen Lipschitzbedingung genügen, was wir gleich nachprüfen werden.

Eine sinnvolle Wahl der Intervalle ist $I = [-\frac{1}{10}, \ \frac{1}{10}]$ und $J = [0, 2]$, mit welchen die obengestellte Frage beantwortet werden soll. Wir überprüfen zuerst die Wohldefiniertheit. Sei $g \in C(I,J)$ beliebig, dann gilt für alle $x \in I$:

$$\mathcal{F}(g)(x) = 1 + \int_0^x \Big(\sin(s) + (g(s))^2\Big)\, ds = 2 - \cos(x) + \int_0^x (g(s))^2\, ds \ . \tag{3}$$

Im letzten Integral ist der Integrand in jedem Falle kleiner oder gleich 4. Zusammen mit $|x| \leq 1/10$ ergibt dies

$$\int_0^x (g(s))^2\, ds \in \left[-\frac{4}{10}, \frac{4}{10}\right] \ , \ \text{und} \ \cos(x) \in [0.9, 1] \ . \tag{4}$$

Damit ist $\mathcal{F}(f) \in C(I,J)$, was die Wohldefiniertheitsfrage beendet.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ mit dieser Wahl der Intervalle auch eine Kontraktion bildet. Dies machen wir explizit und wählen $f, g \in C(I,J)$ beliebig.

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)) &= \sup_{x \in I} |\mathcal{F}(f)(x) - \mathcal{F}(g)(x)| = \sup_{x \in I} \left| \int_0^x \left(w(s, f(s)) - w(s, g(s))\right)\, ds \right| \\ &\leq \sup_{x \in I} \int_0^x |w(s, f(s)) - w(s, g(s))|\, ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{10}} |w(s, f(s)) - w(s, g(s))|\, ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{10}} |v(f(s)) - v(g(s))|\, ds \end{aligned}$$

An dieser Stelle kommt nun die lokale Lipschitzstetigkeit von v ins Spiel, d. h. es gibt ein $L > 0$, sodass $|v(x) - g(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in J$ ist.

Demnacht gilt also:

$$d(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)) = \int_0^{\frac{1}{10}} |v(f(s)) - v(g(s))| \; ds \leq \int_0^{\frac{1}{10}} L \, |f(s) - g(s)| \; ds$$
$$\leq L \int_0^{\frac{1}{10}} ds \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| = \frac{1}{10} L \; d(f, g)$$

Da die Lipschitzkonstante $L = \sup_{y \in J} |v'(y)| = 4$ ist, ist auch $\mathcal{F}$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\Theta := 2/5$.

Nun kommen wir zurück auf die Frage, wie viele Iterationen notwendig sind, um den Fehler unter 0.01 zu halten. Wir verwenden die bekannte Formel:

$$d(\alpha, \alpha_n) \leq \frac{\Theta^n}{1 - \Theta} d(\alpha_1, \alpha_0) \tag{5}$$

Hierbei sei α_k die k-te Iterierte und α die unbekannte Lösung der Differentialgleichung.

Schätzen wir grob $d(\alpha_1, \alpha_0) \leq 0.2$ (Kurvendiskussion, siehe Plot) so erhalten wir $n = 4$ als Lösung.

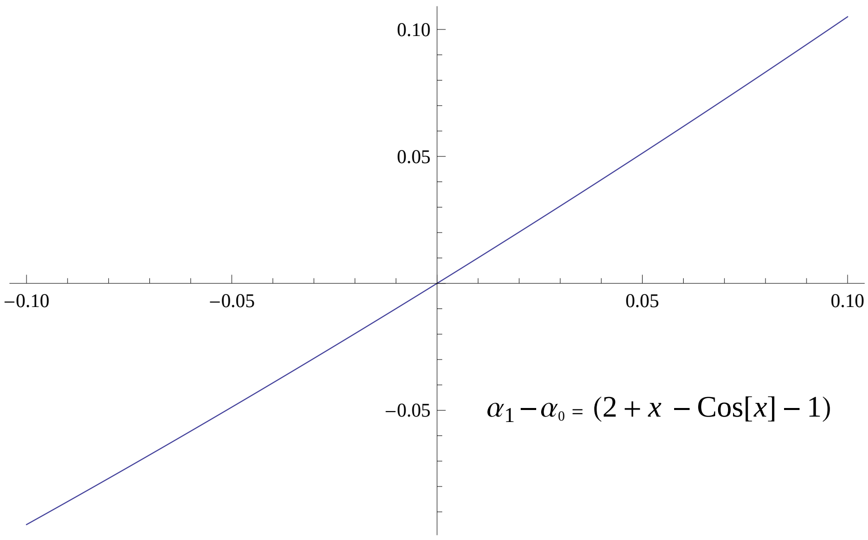

Abbildung 1: Graph der Differenzfunktion. Betragsmaximum wird auf dem Rand angenommen.