Aufgabe 11.4

Behauptung:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung per vollständiger Induktion für alle natürliche Zahlen n:

- IA: $n = 1$ (leeres Produkt)
- IV: Gelte die Behauptung für eine feste natürliche Zahl $n \geq 1$
- IS: $n \to n + 1$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^n - x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^n - x_1^n \end{pmatrix}$$

In diesem Schritt wurde von jeder Zeile die erste Zeile abgezogen!

$$= \det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^n - x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^n - x_1^n \end{pmatrix}$$

Und nun wurde sinnvollerweise nach der ersten Spalte entwickelt.

$$= (x_2 - x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \dots & x_2^{n-1} + \dots + x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^n - x_1^n \end{pmatrix}$$

Hier wurde natürlich die angegebene Formel benutzt. Diese kann man in jeder Zeile anwenden und erhält:

$$= \prod_{1<j\leq n+1}(x_j - x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \dots & x_2^{n-1} + \dots + x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} + x_1 & \dots & x_{n+1}^{n-1} + \dots + x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Durch Wahl geeigneter Vielfachheiten der ersten Spalte und anschließendem Abziehen dieser von den anderen Spalten, findet man:

$$= \prod_{1<j\leq n+1}(x_j - x_1)\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Nun wird die IV eingesetzt:

$$= \prod_{1<j\leq n+1}(x_j - x_1)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_{j+1} - x_{i+1}) = \prod_{1<j\leq n+1}(x_j - x_1)\prod_{2\leq i<j\leq n+1}(x_j - x_i)$$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n+1}(x_j - x_i) \qquad \square$$