Universität Erlangen-Nürnberg Wintersemester 2015/16
Vorlesung Functional analysis and operator theory
Aufgabenzettel 6
Department Mathematik
H. Schulz-Baldes

Aufgaben zum Spektrum und Spektralsatz

Aufgabe 1: Es sei X ein reflexiver Banachraum und $T : X \to X$ ein beschränkter Operator. Wir definieren den numerischen Wertebereich des Operators:

$$W(T) = \{x'(Tx) \mid x \in X, x' \in X', \|x\| = \|x'\| = 1, x'(x) = 1\} \; .$$

Zeigen Sie:

$$\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)} \; .$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis den Satz von James: In einem reflexiven Banachraum nimmt jedes Funktional seine Norm an.

Aufgabe 2: Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter normaler Operator. Zeigen Sie, dass für jede Zahl $\lambda \in \sigma(T)$ eine Folge $(x_n) \subset \mathcal{H}$ mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, die Folgendes erfüllt:

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \; .$$

Dies bedeutet, dass für normale Operatoren jeder Spektralwert eine approximativer Eigenwert ist.

Aufgabe 3: Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Bezeichne mit $P(A) = \chi_A(T)$ die spektrale Projektion von T auf eine Borelmenge A. Zeigen Sie nun, dass für jede reelle Zahl λ Folgendes gilt:

$$\text{Bild}\, P(\{\lambda\}) = \text{Kern}(T - \lambda) \; .$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ mit einem Borelmaß μ und den Multiplikationsoperator

$$M_\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \, , \quad (M_\phi f)(t) = \phi(t) f(t) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

mit einer beschränkten messbaren Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimmen die Resolventenmenge und das Punktspektrum von M_ϕ.

Aufgabe 5: Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit einem zyklischen Vektor $v \in \mathcal{H}$, d. h.

$$\text{lin span}\big\{T^n v \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big\}$$

liegt dicht in $\mathcal{H}$. Zeigen Sie nun, dass jeder Eigenwert von T nur eine Vielfachheit von 1 haben kann.