Universität Erlangen-Nürnberg Wintersemester 2015/16
Vorlesung Functional analysis and operator theory
Aufgabenzettel 5
Department Mathematik
H. Schulz-Baldes

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass jede orthogonale Projektion P aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Extremalpunkt der konvexen Menge

$$B_+ \;=\; \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid T \geq 0, \|T\| \leq 1\}$$

ist, d.h. für $P = \lambda S + (1-\lambda)T$ mit $1 > \lambda > 0$ und $S, T \in B_+$ folgt $S = T = P$.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A,\, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass für ihre Spektren gilt:

$$\sigma(AB) \setminus \{0\} \;=\; \sigma(BA) \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 3: Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis. Gegeben sei eine unendliche Matrix $A = (\alpha_{n,m})_{n,m\geq 1}$ und eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}_+$, sowie positive Konstanten b und c derart, dass für alle $n, m \geq 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n,m}| a_n \leq b\, a_m \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{m,n}| a_n \leq c\, a_m$$

Zeigen Sie, dass ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existiert, der A als Matrix hat, d.h. $\langle e_n | T e_m \rangle = \alpha_{n,m}$.

Aufgabe 4: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A,\, B$ zwei positive selbstadjungierte Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie, dass folgende Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} A \;\leq\; B \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{A} \;\leq\; \sqrt{B}\,, \\ \frac{A+B}{2} \quad &\geq \quad \sqrt{AB}\,, \\ \sqrt{\frac{A+B}{2}} \quad &\geq \quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zwei Hilberträume.
Zeigen Sie, dass für alle Operatoren $A_1,\, \ldots,\, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\, \mathcal{H}_2)$ und für alle Zahlen $\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i \Big|^2 \;\leq\; \Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} |A_i|^2 \Big)\,.$$

Aufgabe 6: Seien A und B Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ so, dass A positiv und AB hermitesch ist. Zeigen Sie, dass dann mit dem Spektralradius $r(B)$ von B gilt

$$AB \leq r(B) A\,.$$

Aufgabe 7: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass ein positiver Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ genau dann bijektiv ist, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass $T - \varepsilon 1$ positiv ist. Zeigen Sie anschliessend, dass ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ genau dann bijektiv ist, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass $T^*T - \varepsilon 1$ und $TT^* - \varepsilon 1$ positiv sind.

Aufgabe 8: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ das $p$te Schatten Ideal. Zeigen Sie für die Dualräume folgende Beziegungen:

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{H})' \;\cong\; \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,, \qquad \mathcal{L}^p(\mathcal{H})' \;\cong\; \mathcal{L}^q(\mathcal{H}) \,,$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.