Universität Erlangen-Nürnberg Wintersemester 2015/16
Vorlesung Functional analysis and operator theory
Aufgabenzettel 4
Department Mathematik
H. Schulz-Baldes

Aufgabe 1: Sei $C^1([0,1])$ der Raum aller stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Betrachten Sie den Ableitungsoperator

$$D : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)\ , \qquad Df = f'\ .$$

Zeigen Sie, dass D linear ist, einen abgeschlossenen Graphen hat, aber nicht stetig ist.

Aufgabe 2: Seien X und Y zwei normierte Räume, die beide nicht gleich $\{0\}$ sind. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Jeder nichttriviale lineare und stetige Operator $U :\ X \to Y$ ist offen.

(ii) Jeder nichttriviale lineare und stetige Operator $U :\ X \to Y$ ist surjektiv.

(iii) $\dim_{\mathbb{K}}(Y) = 1$.

Aufgabe 3: Seien X, Y Banachräume. Zeigen Sie:

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge in X, wenn $(S(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $S \in B' = \{S \in X' \mid \|S\| \leq 1\}$ eine $gleichmäßige$ Cauchy-Bedingung erfüllt, d.h. wenn gilt

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n,\ m \geq n_0, S \in B' :\ |S(x_n) - S(x_m)| \leq \epsilon.$$

(b) Ist $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, so ist die transponierte Abbildung $T' :\ Y' \to X'$ definiert durch $T'(S) = S \circ T$ für $S \in Y'$. Zeigen Sie, dass T' genau dann stetig invertierbar ist, wenn dies für T gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma(T) = \sigma(T')$ für $X = Y$ gilt.

Aufgabe 4: Sei T der Linksshift auf ℓ^1, d.h. $T(x_1,\, x_2,\, \dots) = (x_2,\, x_3,\, \dots)$ und S der Rechtsshift auf ℓ^∞, d.h. $S(x_1,\, x_2,\, \dots) = (0,\, x_1,\, x_2,\, \dots)$. Zeigen Sie:

(a) $\sigma(T) = \sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die offene Einheitskugel $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$ zum Punktespektrum von T gehört, aber nicht zum Punktespektrum von S. Zudem hat $\lambda\mathbf{1} - S$ für $\lambda \in \mathbb{D}$ kein dichtes Bild. (Also gehört $\mathbb{D}$ zum sogenannten $residuellen\ Spektrum$ von S).

Aufgabe 5: Sei

$$T :\ C([0,\, 1]) \to C([0,\, 1]), \qquad (Tx)(s) = \int_0^s\ x(t)\ dt.$$

Geben Sie das Spektrum von T an.

Aufgabe 6: Sei $X = \{x \in L^\infty([0,1]) \mid \ x$ ist stetig bei 0 und 1, $x(0) = 0\}$ und

$$T:\ X \to X, \qquad (Tx)(s) = sx(s).$$

Bestimmen Sie das Punktspektrum $\sigma_p(T)$, das stetige Spektrum $\sigma_c(T)$ und das Restspektrum $\sigma_r(T)$ von T.