Department Mathematik
H. Schulz-Baldes

Aufgabe 1: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass jedes lineare stetige Funktional auf $\mathcal{G}$ eine eindeutige Hahn-Banach Erweiterung besitzt.

Aufgabe 2: Sei

$$\mathcal{G} \;=\; \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \mid x_{2k+1} = 0 \quad \forall\, k \geq 0\}.$$

Zeigen Sie, dass jedes von Null verschiedene lineare stetige Funktional auf $\mathcal{G}$ unendlich viele Hahn-Banach Erweiterungen besitzt.

Aufgabe 3: Sei $\mathcal{G} \;=\; \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \mid x_1 - 3x_2 = 0\}$ und $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_1.$$

Zeigen Sie, dass

$$g(x) \;=\; \frac{3}{4}\,x_1 + \frac{3}{4}\,x_2, \qquad \forall\, x \in \ell^1$$

die eindeutige Hahn-Banach Erweiterung von f ist.

Aufgabe 4: Sei X ein Banachraum und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge linearer und stetiger Funktionale auf X. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) Für jede absolut konvergente Folge $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$ ist die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} T_k(x_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(b) Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in der Norm.

Aufgabe 5: Die *Chebyshev-Polynome* T_n.

(a) Zeigen Sie, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom $\tilde{T}_n$ von Grad $\leq n$ existiert, für das gilt $\cos(n\theta) = \tilde{T}_n(\cos(\theta))\ \forall\theta \in \mathbb{R}$. (Dabei ist es günstig per Induktion mit zu beweisen, daß ebenso ein Polynom Q_n von Grad $\leq n+1$ existiert, für das gilt $\sin(\theta)\sin(n\theta) = Q_n(\cos\theta)$.)

(b) Sei μ das Maß auf $[-1,1]$ mit Dichte $\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ zum Lebesgue-Maß. Setzen Sie $T_n := \sqrt{2}\tilde{T}_n$. Zeigen Sie, dass die Polynome T_n ein Orthonormalsystem in $L^2_\mu([-1,1])$ bilden.

(c) Begründen Sie (ohne weitere Rechnungen!), dass die T_n genau die Polynome sind, die beim Orthogonalisieren der Monome x^n in $L^2_\mu([-1,1])$ im Gram-Schmidt-Verfahren entstehen.

Aufgabe 6: Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $\{\phi_n\}_{n\geq1}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator mit $\langle\phi_n|T\phi_m\rangle = (n+m-1)^{-1}\ \forall n,m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass T beschränkt ist mit $\|T\| \leq \pi$. (Tipp: Schurtest im Skript)

Aufgabe 7: Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $\{\phi_n\}_{n\geq1}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Sei $\{\psi_n\}_{n\geq1}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\phi_n - \psi_n\|^2 < \infty\,.$$

Zeigen Sie, dass $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ dann auch eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist.