Universität Erlangen-Nürnberg Wintersemester 2015/16
Vorlesung Functional analysis and operator theory
Aufgabenzettel 2
Department Mathematik
H. Schulz-Baldes

Aufgabe 1: Zeigen Sie die folgenden Gleichheiten für Dualräume von Folgenräume:

$$(c_0)' = \ell^1 \qquad (\ell^1)' = \ell^\infty$$

Aufgabe 2: Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Des weiteren sei gegeben $x \notin U$. Zeigen Sie, dass ein $T \in X'$ existiert mit $T(x) \neq 0$ und $T(u) = 0$ für alle $u \in U$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass jedes lineare und stetige Funktional auf c_0 eine eindeutige Hahn-Banach Erweiterung auf ℓ^∞ besitzt.

Aufgabe 4: Zeigen Sie: Ein abgeschlossener Unterraum eines reflexiven Banachraumes ist reflexiv.

Aufgabe 5: Sei X ein Banachraum. Für alle linearen stetigen Operatoren $A,\, B \in \mathcal{B}(X)$ definiert man $T_{A,\,B} : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ durch $T_{A,\,B}(S) = ASB \ \forall S \in \mathcal{B}(X)$. Zeigen Sie, dass aus der Kompaktheit von A und B auch die Kompaktheit von $T_{A,\,B}$ folgt. Verwenden Sie hierfür folgende Verallgemeinerung des Satzes von Arzela-Ascoli: Sei $\mathcal{A} \subset C(\Omega, X)$ eine Familie stetiger Funktionen auf einem kompakten Raum Ω in einem Banach-Raum X, die gleichgradig stetig und punktweise relative kompakt ist (d.h. $\{f(\omega) \in X \,|\, f \in \mathcal{A}\}$ ist relativ kompakt für jedes $\omega \in \Omega$), dann ist $\mathcal{A}$ kompakt.

Aufgabe 6: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\langle x_n \mid x_m \rangle = \frac{1}{2015}$ für $n \neq m$. Zeigen Sie, dass diese Folge schwach konvergent ist. D.h. es gibt ein $x \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle x_n \mid y \rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x \mid y \rangle \qquad \forall y \in \mathcal{H}\,.$$

Konstruieren Sie ein Beispiel für eine solche Folge.