Universität Erlangen-Nürnberg Wintersemester 2015/16
Vorlesung Functional analysis and operator theory
Department Mathematik
H. Schulz-Baldes

Aufgabe 1: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Interval und $\alpha \in (0,\, 1)$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt α-Hölder stetig, falls gilt

$$[f]_\alpha \;:=\; \sup_{x \neq y \in I} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \;<\; \infty\;.$$

Der Raum der α-Hölder stetigen Funktionen sei mit C^α bezeichnet. Zeigen Sie, dass durch

$$\|f\|_\alpha := \; \|f\|_\infty + [f]_\alpha$$

eine Norm auf C^α gegeben ist, durch die C^α zum Banach-Raum wird. (Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die übliche Supremumsnorm.)

Aufgabe 2: Es sei $\ell = \{(x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass durch $d :\; \ell \times \ell \to [0,\, 1]$

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

die Menge ℓ zu einem metrischen Raum wird.

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie für $1 \leq p \leq q < \infty$ die Inklusion $\ell^p \subset \ell^q$, genauer

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \qquad \forall x \in \ell^p.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\bigcup_{p<\infty} \ell^p \subset c_0$ gilt, und diese Inklusion echt ist.

Aufgabe 4: Für $x \in C^1([0,\, 1])$ sei

$$\|x\|_1 = |x(0)| + \|x'\|_\infty\,.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Norm auf $C^1\,([0,1])$ ist. Ist sie äquivalent zu $\|\cdot\|$, definiert durch $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$?

Aufgabe 5: Ziel dieser Übung ist es, die folgende Integralgleichung zu lösen:

$$f(x) - \int_0^1 dy\; 2xyf(y) \;=\; \sin(\pi x)\;. \qquad (*)$$

Dazu setzen wir $T_k f(x) = \int_0^1 2xyf(y)\; dy$. Zeigen Sie, dass T_k ein stetiger linearer Operator auf $(C([0,1]), \|.\|_\infty)$ ist, und $(*)$ ist damit äquivalent zu $(\mathrm{Id}-T_k)(f) = g$ mit $g(x) = \sin(\pi x)$. Berechnen Sie $(\mathrm{Id}-T_k)^{-1}(g)$ mit Hilfe der Neumann'schen Reihe. (Berechnen sie dazu zuerst die Integralkerne k_n von T_k^n, d.h. $T_k^n = T_{k_n}$, und damit dann den Integralkern von $\sum_{n=1}^\infty T_k^n$.) Warum lässt sich die Neumann'sche Reihe anwenden, obwohl $\|T\| = 1$ gilt?

Aufgabe 6: Sei $k \in C([0,1]^2)$. Dann heißt der Integraloperator $T_k : C([0,1]) \to C([0,1])$ gegeben durch

$$T_k f(x) \;:=\; \int_0^x k(x,y) f(y)\; dy$$

Volterra'scher Integraloperator. Man zeige:

(a) T_k ist wohldefiniert und stetig. Geben Sie eine obere Schranke für die Norm von T_k an.

(b) T_k ist kompakt.

(c) T_k hat keine von 0 verschiedenen Eigenwerte.

Aufgabe 7: Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Weiter sei

$$\pi :\; X \;\to\; X/\mathrm{Ker}(T)\;, \quad x \mapsto [x]$$

die natürliche Projektion. Zudem sei $\|[x]\| := \inf_{x' \in [x]} \|x'\|$ die Norm auf $X/\mathrm{Ker}(T)$. Zeigen Sie

(a) Es existiert ein linearer Operator $\widehat{T} : X/\mathrm{Ker} \to Y$ für den gilt $T = \widehat{T} \circ \pi$.

(b) $\widehat{T}$ ist injektiv und $\|T\| = \|\widehat{T}\|$.

(c) T ist kompakt genau dann, wenn $\widehat{T}$ kompakt ist.

Aufgabe 8: Sei X ein normierter Raum und S, T lineare Operatoren auf X, für die die Beziehung $ST - TS = \mathrm{Id}$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$.

(b) Zeigen Sie ferner, dass S und T nicht beide zugleich stetig sein können.

Aufgabe 9: Ist X ein Hilbertraum und V ein abgeschlossener linearer Unterraum, so läßt sich jedes $x \in X$ in eindeutiger Weise in der Form $x = x' + x''$ mit $x' \in V$ und $x'' \in V^\perp$ darstellen. Der *Projektionsoperator* $P_V = P$ auf V ist dann definiert durch $P(x) = x'$. Zeigen Sie Folgendes:

(a) Jeder Operator $A \in \mathcal{B}(X,X)$ ist durch die Werte $\langle x|Ay\rangle$, $x, y \in X$, eindeutig bestimmt.

(b) Ist P ein Projektionsoperator, so gilt $\langle Px|y\rangle = \langle x|Py\rangle \;\forall\, x, y \in X$.

(c) $P \in \mathcal{B}(X,X)$ ist ein Projektionsoperator genau dann, wenn gilt $P^2 = P$ und $\langle Px|y\rangle = \langle x|Py\rangle \;\forall\, x, y \in X$.

(d) Sind P_{V_1}, P_{V_2} zwei Projektionsoperatoren, $W = V_1 \cap V_2$, $V_1 = W \oplus W_1$ und $V_2 = W \oplus W_2$, $W_1, W_2 \perp W$, so ist $P_{V_1}P_{V_2} = P_{V_1} \circ P_{V_2}$ genau dann ein Projektionsoperator falls gilt $W_1 \perp W_2$. In diesem Fall ist $P_{V_1}P_{V_2} = P_{V_2}P_{V_1} = P_W$.

Aufgabe 10: Sei $X = L^2([-1,1], dx)$ versehen mit dem üblichen Skalarprodukt. Seien V und W gegeben durch

$$V = \left\{ f \in X \,\middle|\, \int_{-1}^{1} f(t)\; dt = 0 \right\} ,$$

$$W = \{ f \in X \mid f(-t) = f(t) \text{ für fast alle } t \} .$$

(a) Zeigen Sie, daß V ein abgeschlossener Unterraum von X ist und geben Sie $V^\perp$ an.

(b) Geben Sie den Abstand von $g : t \mapsto t^2$ zu V an.

(c) Zeigen Sie, daß W ein abgeschlossener Unterraum von X ist und geben Sie $W^\perp$ an.

(d) Geben Sie den Abstand von $h : t \mapsto e^t$ von W an.

Aufgabe 11: Es $K \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge und μ ein endliches Borelmaß auf K. Mit $L^2_{\mathbb{R}}(K, \mu)$ sei der Vektorraum der bezüglich μ quadrat-integrierbaren reellwertige Funktionen auf K bezeichnet. Seien folgende Funktionen rekursiv definiert:

$$\tilde{P}_n := x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle x^n | P_k \rangle \cdot P_k$$

und $P_n := \tilde{P}_n / \|\tilde{P}_n\|_2$ (Gram-Schmidt-Verfahren angewandt auf die Monome x^n). Zeigen Sie, dass die Polynome P_n einer *Drei-Term Rekurrenzrelation* genügen, d.h. dass gilt

$$xP_n = t_{n+1} P_{n+1} + v_n P_n + t_n P_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

für geeignete Koeffizienten t_n, v_n $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Aufgabe 12: Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $B : X \times X \to \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

(i) $B(\alpha x + \beta y, z) = \overline{\alpha} B(x,z) + \overline{\beta} B(y,z)\ \forall\, x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(ii) $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x,y) + \beta B(x,z)\ \forall\, x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(iii) $|B(x,y)| \leq C \|x\| \|y\|\ \forall\, x, y \in X$ für eine Konstante $0 \leq C < \infty$.

Zeigen Sie, dass dann B von der Form $B(x,y) = \langle x | Ay \rangle$ für einen linearen und beschränkten Operator $A : X \to X$ ist.