# 1 Entwicklungssatz für Vektorräume mit Skalarprodukt

Sei $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ausgestattet mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$, d. h. $X$ ist ein sogenannter Prähilbertraum (PHR). Ist dieser mit der induzierten Norm sogar vollständig, so spricht man von einem Hilbertraum. Im weiteren sei $X$ immer ein Prähilbertraum!

**1.1 Definition** Die lineare Hülle einer Menge $A \subseteq X$ wird definiert als:

$$lin(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\} \tag{1}$$

**1.2 Definition** Sei $A \subseteq X$, der *Abschluss* $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von $A$.

**1.3 Satz** $A \subseteq X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow$ Der Grenzwert jeder konvergente Folge aus $A$ liegt wieder in $A$.

**1.4 Bemerkung** Der Beweis ist nicht schwierig, aber für unsere Zwecke eher uninteressant. Die wichtigste Aussagen des Satzes sollten wir jedoch mitnehmen: Durch den Abschluss einer Menge werden alle existierende Grenzwerte der Folgen in A aufgenommen. Dies bewegt uns zu folgender Definition.

**1.5 Definition** Eine Menge $A$ heißt *total*, wenn gilt:

$$\overline{lin(A)} = X \tag{2}$$

**1.6 Definition** Eine Menge $\mathcal{O}$ heißt ein Orthormalsystem (ONS) in $X$, wenn eine (Index-) Menge $I$ existiert, sodass gilt

$$\mathcal{O} = \{e_a \in X \; | a \in I\} \quad \text{und } \langle e_a \mid e_b\rangle = \delta_{ab} \tag{3}$$

An die Indexmenge $I$ sind keine besonderen Voraussetzungen verknüpft, insbesondere muss sie nicht mal abzählbar sein. In endlichdimensionalen Vektorräumen ist dies natürlich nicht möglich.

**1.7 Definition** Ein ONS $\mathcal{O}$ heißt eine Orthonormalbasis (ONB), wenn es total ist, d. h.:

$$\overline{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{a_i} \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{K}, e_{a_i} \in \mathcal{O}, n \in \mathbb{N} \right\}} = X \tag{4}$$

**1.8 Bemerkung** In endlichdimensionalen Vektorräumen ($dim(X) = n$) ist eine ONB natürlich auch eine Vektorraumbasis im üblichen Sinne (d.h ohne Abschluss in (4)) und insbesondere ist ein ONS genau dann eine Orthonormalbasis, wenn sie aus $n$ Elementen besteht. All dies gilt jedoch nicht mehr im Unendlichdimensionalen!

**1.9 Satz** Jedes ONS ist linear unabhängig.

**Beweis** Die lineare Unabhängigkeit ist wie immer zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e_{a_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j e_{a_j} \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j e_{a_j} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} c_i e_{a_i} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \tag{5}$$

Daraus folgt nun offentlich $c_j = 0$ für alle $j \in \{1 \dots n\}$, und damit die Aussage.

Damit ist die Vorarbeit geleistet und wir wenden uns endlich dem Entwicklungssatz zu:

**1.10 Satz**

(a) Ist $\{e_a \in X \mid a \in I\}$ ein ONS in $X$, so gilt für alle $x \in X$:

$$\sum_{\alpha \in I} |\langle e_\alpha \mid x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(allgemeine Bessel-Ungleichung)}$$

(b) Ein ONS $\{e_a \in X \mid a \in I\}$ in $X$ ist genau dann eine ONB, wenn für alle $x \in X$ gilt:

$$\sum_{\alpha \in I} |\langle e_\alpha \mid x \rangle|^2 = \|x\|^2 \qquad \text{(Parsevalsche Gleichung)}$$

Insbesondere gilt dann auch für jedes $x \in X$:

$$x = \sum_{\alpha \in I} \langle e_\alpha \mid x \rangle e_\alpha \tag{6}$$

Es bleibt natürlich noch zu erklären, wie die Summe für ein überabzählbares $I$ zu verstehen ist.

**Beweis** Folgt bald