Prinzip von Cavalieri

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ Lebesgue-messbar $\Rightarrow$ Für fast jedes $y_0 \in \mathbb{R}^q$ ist M_{y_0} messbar.

$$M_{y_0} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x, y_0) \in M\}$$

Und es gilt:

$$\mu_{p\times q}(M) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu_p(M_y)dy$$

Beispiel

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kegel mit dem Einheitskreis als Grundfläche und Höhe $h > 0$.

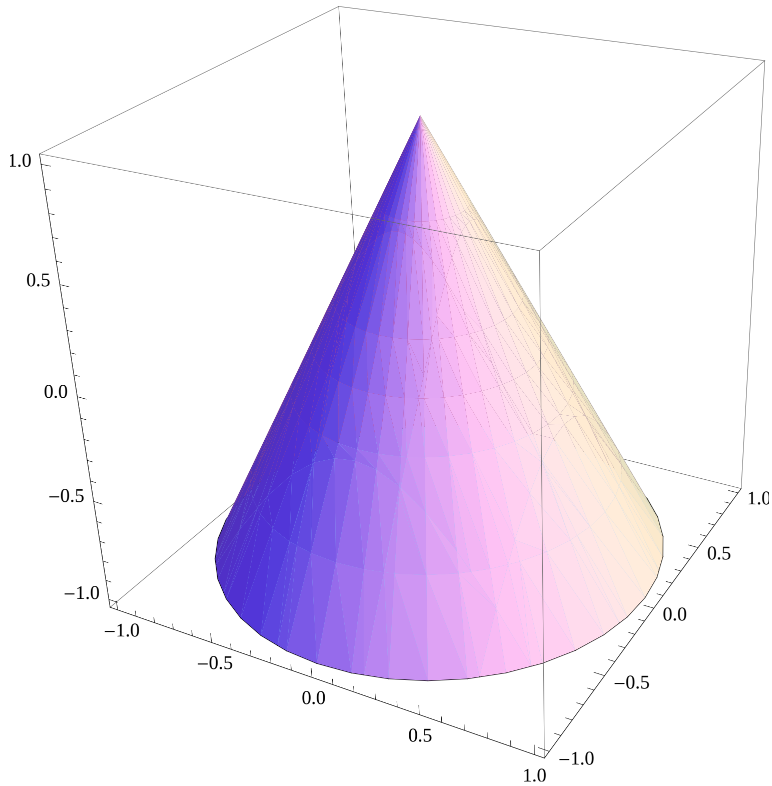

Abbildung 1: Kegel

Sinnvollerweise schneidet man den Kegel horizontal, d. h. $K_{z_0} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq h - z_0\}$ und damit ist:

$$\text{vol}_3(K) = \int_{[0,h]} \text{vol}_2(K_z)dz = \int_{[0,h]} \pi(h-z)^2 dz = \frac{1}{3}\pi h$$