Aufgabe 37 (a)

Sei $r > 0$ und $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph.

Beh: f hat z_0 als Nullstelle der Ordnung $n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{f}$ hat z_0 als Polstelle der Ordnung n.

Bew: ($\Rightarrow$) Wurde in der Übung gemacht. Zu beachten ist nur, dass man die Potenzreihenentwicklung für $U_{r/2}(z_0) =: U$ aufschreibt, damit $\overline{U} \subset U_r(z_0)$.
($\Leftarrow$) $\frac{1}{f}$ hat nun einen Pol der Ordnung n bei z_0, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(z)} &= \sum_{k=-n}^{\infty} b_k (z-z_0)^k, \quad \text{mit } b_{-n} \neq 0\\ &= (z-z_0)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-n}(z-z_0)^k =: (z-z_0)^{-n} h(z), \quad \forall z \in U_{r/2}(z_0) \setminus \{z_0\}\\ &\qquad \text{mit } h(z) \text{ holomorph und } h(z_0) \neq 0\end{aligned}$$

Also gilt auch für f auf U :

$$f(z) = (z-z_0)^n \frac{1}{h(z)} = (z-z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad \text{mit } a_0 \neq 0$$

Da $\frac{1}{h}$ auf U holomorph ist, existiert also auch eine Reihenentwicklung um z_0. Betrachten wir nun die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= 0\\ \frac{\mathrm{d}^k f(z)}{\mathrm{d}z^k}\Big|_{z=z_0} &= 0 \text{ für } k \in \{1, \dots, n-1\}\\ \frac{\mathrm{d}^n f(z)}{\mathrm{d}z^n}\Big|_{z=z_0} &\neq 0, \text{ denn } a_0 \neq 0\end{aligned}$$

Oder ohne Reihendarstellung für $\frac{1}{h}$ und einfache Leibnizregel. Also hat f eine Nullstelle der Ordnung n bei z_0. $\square$