Aufgabe 2(c)

Es seien $f, g \in C^n(I, \mathbb{R})$.

Beh: $P_{n,x_0}(f \cdot g) = P_{n,0}\left(P_{n,x_0}(f) \cdot P_{n,x_0}(g)\right)$

Bew: Man betrachtet am besten zuerst die rechte Seite und entwickelt den Ausdruck in den Klammern folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\left(P_{n,x_0}(f) \cdot P_{n,x_0}(g)\right)(h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0) h^k \\ &= \sum_{i,k=0}^{n} \frac{1}{k! i!} f^{(k)}(x_0) g^{(i)}(x_0) h^{i+k} =: z(h)\end{aligned}$$

$$P_{n,0}(z)(h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} z^{(m)}(0) h^m$$

Wobei nun gilt:

$$z^{(m)}(h) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i + k \neq m \\ \frac{(i+k)!}{i!k!} f^{(k)}(x_0) g^{(i)}(x_0), & \text{wenn } i + k = m \end{cases}$$

Also:

$$\begin{aligned}P_{n,0}\left(P_{n,x_0}(f) \cdot P_{n,x_0}(g)\right)(h) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} z^{(m)}(0) h^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{i+k=m} \left(\frac{1}{m!} \frac{(i+k)!}{i!k!} f^{(k)}(x_0) g^{(i)}(x_0) h^m \right) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} h^m \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!k!} f^{(k)}(x_0) g^{(m-k)}(x_0) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} h^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(m-k)}(x_0) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} h^m (f \cdot g)^{(m)}(x_0) \\ &= P_{n,x_0}(f \cdot g)(h) \qquad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 2(d)

Es seien $f, g \in C^n(I, \mathbb{R})$ mit $f(x_0) = 0$.

Beh: $P_{n,x_0}(g \circ f) = P_{n,0}\left(P_{n,f(x_0)}(g) \circ [P_{n,x_0}(f)]\right)$

Bew: Links steht das Taylorpolynom von $g \circ f$ und rechts auf jeden Fall ein Polynom vom Grad $\leq n$. Nach Teil (b) sind also nur die Ableitungen (an $h = 0$) zu untersuchen, da das

Taylorpolynom dadurch eindeutig bestimmt ist. Nun reicht es dafür aus die Ableitungen des Ausdruck in runden Klammern zu berechnen (warum?):

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}h^k}\left(P_{n,f(x_0)}(g)\circ[P_{n,x_0}(f)]\right)(h)\,|_{h=0}\\
&\quad=\sum\frac{n!}{m_1!\cdots m_n!}P_{n,0}(g)^{(m_1+\cdots m_n)}(0)\prod_{j=0}^{n}(P_{n,x_0}(f)^{(j)}(0))^{m_j}\\
&\quad=\sum\frac{n!}{m_1!\cdots m_n!}g^{(m_1+\cdots m_n)}(0)\prod_{j=0}^{n}(f^{(j)}(0))^{m_j}\\
&\quad=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(f\circ g\right)(x)\,|_{x=0} \qquad\square
\end{aligned}$$