Aufgabe 51 (a)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Beh: f ist auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein.

Bew: Da f Riemann-integrierbar existiert die sogenannte Untersumme und damit auch eine zugeordnete Folge von Riemannschen Treppenabbildungen $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden (leicht zu zeigenden) Eigenschaften:

(a) $w_1(x) \leq w_2(x) \leq \dots \quad \forall x \in [a, b]$

(b) $w_n(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b], n \in \mathbb{N}$

(c) $\int\limits_{[a,b]} w_n d\mu \leq \int\limits_a^b f(x)dx =: C$

Die nun folgenden wichtigen Eigenschaften werden wir nun auch beweisen:

(1) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine $\|\|_1$-Cauchy-Folge.

(2) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert f.ü. punktweise gegen f.

(3) Für Riemannsche Treppenabbildungen stimmen Riemann-Integral und Lebesgue-Integral überein.

Der letzte Punkt ist nicht schwer und ist eine gute Übung im Umgang mit den Definitionen der Integrale.

Aber nun zu (1): Aus (a),(b),(c) $\Rightarrow a_n := \int\limits_{[a,b]} w_n d\mu$ ist monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow$ konvergiert in $\mathbb{R}$, insbesondere also ein Cauchy-Folge.
Setze nun oBdA $m > k$, dann gilt:

$$\|w_m - w_k\|_1 = \int\limits_{[a,b]} (w_m - w_k)d\mu = \int\limits_{[a,b]} w_m d\mu - \int\limits_{[a,b]} w_k d\mu = |a_m - a_k|$$

Daraus folgt nun, dass $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\|_1$-Cauchy-Folge ist.
Zu (2): Folgt direkt mit der Normkonvergenz.

Mit (1),(2) gilt nun direkt: f ist auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar und:

$$\int\limits_{[a,b]} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} w_n d\mu \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b w_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

□

Aufgabe 51 (b)

$$I := \int\limits_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \int\limits_1^\infty \frac{\sin(\pi k)}{k} dk = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_k^{k+1} \frac{\sin(\pi k')}{k'} dk'$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1} \int\limits_k^{k+1} \sin(\pi k')dk' \leq I \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \int\limits_k^{k+1} \sin(\pi k')dk'$$

Mit Leibnizkriterium ist I also endlich und damit konvergiert das Integral.
Mit gleichem Argument nun jedoch ohne wechselndes Vorzeichen betrachten wir $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$, und sehen, dass es wie die harmonische Reihe divergiert. Also ist auch f nicht Lebesgue-integrierbar.