Beispiel einer linearen Abbildung und deren Matrixdarstellung

Betrachten wir zuerst den Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen und bezeichnen diesen mit $C(\mathbb{R})$. Dies ist jedoch ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, sodass wir uns nicht anstrengen müssen eine Basis zu finden, denn diese ist nun mal auch unendlich. Nehmen wir nun aber mal 5 Funktionen heraus und fassen diesen zu einem Tupel zusammen:

$$\mathcal{B} := (\cos, \sin, \cos^2, \sin^2, \cos \cdot \sin), \qquad U := \operatorname{span}(\mathcal{B})$$

So erkennt man an der Bezeichnung schon, dass es sich um eine Basis handelt, und zwar um eine Basis der Vektorraums U.

1. $\mathcal{B}$ bildet eine Basis von U

Bekannterweise muss eine Basis eines Vektorraum diesen erzeugen („aufspannen“) und linear unabhängig sein. Die erste Eigenschaft ist natürlich durch die Definition von U gegeben, bei der zweiten muss man jedoch etwas aufpassen:

$$\lambda_1 \cos \;+\; \lambda_2 \sin \;+\; \lambda_3 \cos^2 \;+\; \lambda_4 \sin^2 \;+\; \lambda_5 \cos \cdot \sin \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = 0 \tag{1}$$

Da es sich auf der linken Seite um reellwertige Funktionen handelt, ist natürlich auch die „0“ eine solche, also die Nullfunktion, die für alle $x \in \mathbb{R}$ die Null herausgibt. Das heißt also, dass man in die Funktionen explizit Zahlen aus $\mathbb{R}$ einsetzen kann, und die Gleichung bleibt so bestehen. Setzt man klugerweise $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{2},\ x_3 = \frac{3\pi}{2},\ x_4 = \pi,\ x_5 = \frac{\pi}{4}$ nacheinander in die Gleichung (1) ein, so erhält man 5 Gleichungen, die die Lösung $\lambda_i = 0$ für alle i ergeben.

Das heißt also, dass die Linearkombination nicht die Nullfunktion ergeben kann, wenn $\lambda_i \neq 0$ für mind. ein i.

$$\Rightarrow \mathcal{B} \text{ ist eine Basis von } U$$

2. Definition einer linearen Abbildung

$$\mathrm{D} : U \to U, \quad f \mapsto D(f) := \frac{df}{dx}$$

Die Abbildung ist wirklich linear, was man ja leicht nachprüfen kann.

3. Bestimmung einer Matrix

Nun steht also eine lineare Abbildung zwischen dem gleichen Vektorraum (Endomorphismus). Dieses benötigt wie man sieht keine Basis, sondern ist glasklar definiert. Den Sinn einer Matrix kann man sich nun folgendermaßen vorstellen:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{D} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^5 & \xrightarrow{M(D)} & \mathbb{R}^5 \end{array}$$

Man kocht also die lineare Abbildung zwischen abstrakten Vektorräumen auf die bekannten Vektorräume herunter und stellt die Abbildung als eine Matrix dar. Für die senkrechte

Pfeile in diesem Bild sind nun selbstverständlich Isomorphismen nötig, die die Vektoren von U denen im $\mathbb{R}^5$ zuordnen.

Für unsere lineare Abbildung D, sieht das dann folgendermaßen aus:

$$\phi : \mathbb{R}^5 \to U, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \longmapsto \sum x_i b_i \quad \text{mit } \mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_5)$$

Dies nennt man dann einen Basisisomorphismus. Das heißt also zum Beispiel, dass der Vektor $(1,0,0,0,0)^T$ nun den Kosinus „repräsentiert“. Unsere Matrix besteht deswegen nur aus reellen Zahlen, aber gibt mit diesem Basisisomorphismus die wirkliche lineare Abbildung wider. Die Matrix ist also tatsächlich von der Basis abhängig und ergibt nur mit dieser überhaupt einen Sinn. Wir schreiben deswegen auch $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ für die nun zu bestimmende Matrix.

4. Aufstellen von $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ und Bestimmung Kern(D) und Bild(D)

Dies ist eine gute und leichte Übung.