Potenzgesetze und Logarithmengesetze im Komplexen

Man kennt die Potenzgesetze und die Logarithmengesetze gewöhnlich schon aus der Schule und ist es gewohnt, mit diesen leicht zu agieren und ohne große Gedanken anzuwenden. Solange man positive reelle Zahlen a, b betrachtet gilt ja auch uneingeschränkt:

$$a^x a^y = a^{x+y}\,, \quad (a^x)^y = a^{xy}\,, \quad a^x b^x = (ab)^x\,, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Da mit der Einführung von komplexen Zahlen aber nun auch schnell Wurzeln von negativen Zahlen oder komplexen Zahlen betrachtet werden, kommt man schnell in Versuchung, diese Gesetze leichtfertig zu übernehmen. Wir werden nun zeigen, dass dies nur teilweise richtig sein kann und was man zusätzlich beachten sollte.

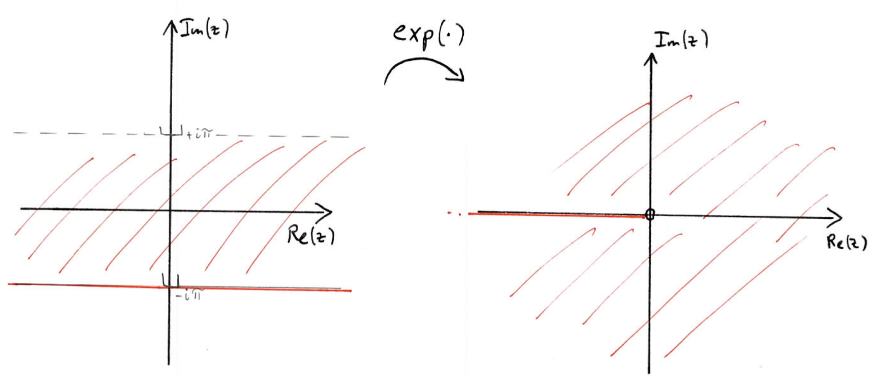
Definitionen über den Logarithmus

Sobald man komplexe Zahlen einführt, bemerkt man, dass man die Wurzelfunktion nicht mehr richtig als eindeutige Funktion definieren kann, denn eine Gleichung wie

$$x^3 = \mathrm{i}$$

besitzt bekanntlich drei verschiedene Lösungen. Und alle könnte man gleichwertig mit dem Symbol $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$ bezeichnen. Es gibt nun nicht mehr die *eine* eindeutige positive Wurzel, wie $\sqrt{2}$ oder $5^{\frac{1}{2}}$ eben zu verstehen sind. Daran müssen die obigen also Potenzgesetze also schon mal scheitern, auf was wir aber erst später eingehen werden.

Zuerst werden wir den Begriff *Logarithmus* einer komplexen Zahl definieren. Dazu muss man wissen, dass $\exp$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion ist, die $\exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt und welche als Bild $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt.



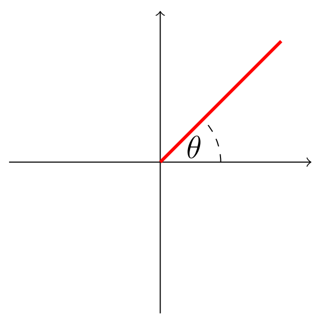
Definition 1. Es sei eine Zahl $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Ein $w \in \mathbb{C}$ heißt nun *ein Logarithmus von* a, wenn $\exp(w) = a$ gilt.

Unter *einem* Logarithmus verstehen wir demnach einfach eine Umkehrung der Exponentialfunktion an diesem Punkt. Aufgrund der Periodizität von $\exp$ ist dieser Logarithmus dadurch natürlich nie eindeutig bestimmt. Man kann sich leicht überlegen, dass solch ein Logarithmus von a immer die Form

$$w = \ln|a| + \mathrm{i}\arg_k(a)\,, \quad \arg_k(a) \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k]$$

für $k \in \mathbb{Z}$ haben muss. Dabei bezeichnet $\arg_k$ die Argumentfunktion mit Werten in den entsprechenden Intervallen. Weiterhin ist $\ln$ der gewöhnliche wohlbekannte reelle Logarithmus einer positiven Zahl. Der Logarithmus von a ist also nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi\mathrm{i}$ eindeutig bestimmt.

Wenn man nun eine lokale stetige Umkehrfunktion der Exponentialfunktion angeben möchte, so darf der Logarithmus nicht diese $2\pi\mathrm{i}$ Sprünge vornehmen und man erhält als maximale Definitionsbereiche sogenannte geschlitzte Ebenen:



Den Schlitz können wir für einen beliebigen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ wählen und erhalten daher

$$D_\theta := \mathbb{C} \setminus \{re^{\mathrm{i}\theta} \mid r \geq 0\}$$

als alle möglichen maximalen Definitionsbereiche einer stetigen Logarithmusfunktion. Aber auch auf diesen hat man nochmals abzählbar viele Möglichkeiten

$$\mathrm{Log}_{\theta,k} : D_\theta \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \ln|z| + \mathrm{i}\arg_{k,\theta}(a)\ .$$

Hier ist sind die genannten Argumentfunktionen genau derart gewählt, dass $\arg_{k,\theta}(a) \in (-2\pi + \theta + 2\pi k, \theta + 2\pi k)$ gilt.

Diese wohldefinierten stetigen Funktionen heißen gewöhnlich die Zweige des komplexen Logarithmus. Jeder bewirkt genau das, was man möchte, nämlich die Exponentialfunktion lokal umkehren, allerdings mit leicht unterschiedlichen Definitionsbereichen und mit Werten, die sich um ganzzahlige Vielfache von $2\pi\mathrm{i}$ unterscheiden können. Letzteres ist natürlich der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion geschuldet. Aus diesem Grund definiert man meistens:

Definition 2. Die Abbildung $\mathrm{Log}_{\pi,0} : D_\pi \to \mathbb{C}$ heißt der *Hauptzweig des Logarithmus*.

Wir schreiben für den Hauptzweig dann kurz $\log$ und wissen nun, dass die Funktion bis auf die negative reelle Achse definiert ist und in folgendem Zusammenhang zum reellen Logarithmus $\ln$ steht:

$$\log(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg(z)\,, \quad \text{mit } \arg(z) \in (-\pi, \pi)\ .$$

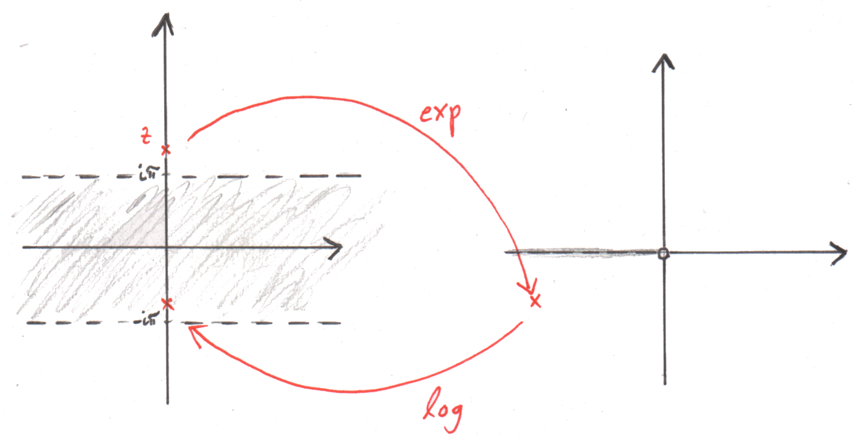
Wir sollten uns nun demnach bewusst sein, dass wir eine bestimmt Wahl getroffen haben, und zwar nur für den Zweck einer eindeutigen Bezeichnung. Wir erhalten nun sofort:

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(\log(z)) = z\,, \quad \log(\exp(z)) = z + 2\pi\mathrm{i}k_z$$

für ein passendes $k_z \in \mathbb{Z}$.

Die Umkehrung gilt demnach im Allgemeinen nur in die eine Richtung, denn der Logarithmus $\log$ bildet immer in den Streifen $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$ ab. Durch die Komposition der zwei Abbildungen verliert man also unter Umständen einen ganzzahligen Anteil von $2\pi\mathrm{i}$.



Demnach erkennen wir auch, dass das Logarithmengesetz im Allgemeinen nicht mehr gelten muss:

$$\log(z_1 z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2) \text{ im Allgemeinen.}$$

Auf der rechten Seite können sich zwei Argumente ja über $\mathrm{i}\pi$ addieren, während es auf der linken Seite per definitionem nicht möglich ist. Ein einfaches Beispiel ist mit $z_1 = z_2 = \mathrm{i} - 1$:

$$\log(z_1 z_2) = \log(-2\mathrm{i}) = \ln(2) - \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \neq \ln(2) + \mathrm{i}\frac{3\pi}{2} = \log(z_1) + \log(z_2) \ .$$

Definitionen über Potenzen

Gehen wir nochmal zurück auf reelle Zahlen. Hier kann man eine ganz allgemeine Potenz sehr leicht mit Hilfe des wohldefinierten Logarithmus $\ln$ definieren.

Definition 3. Für $a > 0$ und $p \in \mathbb{R}$ setzen wir:

$$a^p := \exp(p \ln(a)) \ .$$

So hat man sowohl ganzzahlige, gebrochene als auch irrationale Potenzen eindeutig definiert, nämlich immer als positive Zahl und wohlgemerkt auch nur für positive Basen a. Aber für solche Basen lässt sich Definition auch mit komplexen Exponenten verwenden. Wir merken uns:

> Für alle $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir
>
> $$a^z := \exp(z \ln(a)) \, , \quad \text{z. B. gilt } e^z = \exp(z)$$

Für komplexe Basen $a \in \mathbb{C}$ lässt sich diese Definition nicht verwenden, denn, wie wir gesehen haben, gibt es für den Logarithmus viele verschiedene mögliche „Zweige" im Komplexen. Demnach kann für komplexe Zahlen wohl auch keine eindeutige Potenz zugeordnet werden. Wir sprechen deswegen besser von einer Mengen von möglichen Werten dieser Potenz und schreiben dazu kurz $M[a^p]$, wobei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $p \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} M[a^p] &= \{\exp(p \operatorname{Log}_{\theta,k}(a)) \mid \theta \in \mathbb{R} \, , \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\exp(p \, (\log(a) + 2\pi \mathrm{i} k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{für } a \notin \mathbb{R}_- \\ &= \{e^{p \log(a)} e^{p \cdot 2\pi \mathrm{i} k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{für } a \notin \mathbb{R}_- \end{aligned}$$

Verwendet man den Hauptwert des Logarithmus für Zahlen, die nicht auf der negativen reellen Achse liegen, so schreibt sich die Menge aller möglichen Potenzen sehr kurz. Für untersuchen ein paar übliche Fälle für die Potenz.

Beispiele von Potenzen

Für $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$M[a^p] = \{e^{p\log(a)}\}$$

Es gibt also eine eindeutige Potenz wie im reellen Fall.

Für $p = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$M[a^p] = \{e^{p\log(a)}e^{2\pi \mathrm{i}k/n} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$$

Hier gibt es also genau n Wurzeln.

Für irrationales p erkennt man, dass man in der Tat eine abzählbar unendliche Mengen von Potenzen erhält. Trotzdem zeigen die obigen Beispiele, dass es hilfreich ist, einen Hauptwert der Potenz festzuhalten, wie wir es ja auch beim Logarithmus getan haben.

Definition des Hauptwertes der Potenz

Wir setzen also

$$a^p := e^{p\log(a)} = \exp(p\log(a))$$

für $p \in \mathbb{C}$ und sprechen von dem Hauptwert der Potenz a^p. Wohlgemerkt können wir dies nur für komplexe Zahlen $a \notin \mathbb{R}_-$ definieren.

Gelten die Potenzgesetze

Da wir nun die Potenz a^p als Hauptwert in der Notation festgesetzt hat, wird dies zu Problemen in den Potenzgesetzen führen, wie es auch in den Logarithmengesetzen auftrat, als wir dort den Hauptwert definiert haben.

Wir schreiben kurz auf:

$$a^{z_1}a^{z_2} = \exp\left(z_1\log(a)\right)\exp\left(z_2\log(a)\right) = \exp\left((z_1+z_2)\log(a)\right) = a^{z_1+z_2} \ .$$

Dieses Potenzgesetz gilt also in der Tat noch in aller Reinheit. Wie sieht es aber mit dem zweiten aus? Durchaus schlechter:

$$\begin{aligned}(a^{z_1})^{z_2} &= \exp\left[z_2\log(e^{z_1\log(a)})\right] \\ &= \exp\left[z_2\left(\ln\left|e^{z_1\log(a)}\right| + \mathrm{i}\arg\left(e^{z_1\log(a)}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[z_2\Big(\mathrm{Re}(z_1\log(a)) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(z_1\log(a)\right) + 2\pi\mathrm{i}k_{z_1,a}\Big)\right].\end{aligned}$$

Hier ist $k_{z_1,a} \in \mathbb{Z}$ nun so gewählt, dass $\mathrm{Im}\left(z_1\log(a)\right) + 2\pi k_{z_1,a} \in (-\pi,\pi)$, denn so ist die Argumentfunktion für den Hauptzweig des Logarithmus festgesetzt. Wir erhalten nun also:

$$\begin{aligned}(a^{z_1})^{z_2} &= \exp\left[z_2\Big(z_1\log(a) + 2\pi\mathrm{i}k_{z_1,a}\Big)\right] \\ &= a^{z_1\cdot z_2}\cdot e^{z_2 2\pi\mathrm{i}k_{z_1,a}} \ .\end{aligned}$$

Wie schon erwartet gilt das einfache Potenzgesetz nun in dieser Form nicht mehr, aber man sollte bemerken, dass es für ganzzahliges z_2 immer gültig ist und auch genauso angewendet werden darf, wenn $k_{z_1,a} = 0$ gilt. Für Spezialfälle bleibt uns demnach das Potenzgesetz erhalten.

Wir haben nun gelernt, dass man beim Potenzgesetz und auch beim Logarithmusgesetz im Komplexen vorsichtig sein muss, wenn man sich bei der Notation auf den Hauptzweig einschränkt.

Aufgabe zum Abschluss

Zeige nun selbst, dass auch das Potenzgesetz für unterschiedliche Basen $(ab)^p = a^p b^p$ im Allgemeinen falsch ist.