Mengenlehre
Axiomensystem kurz und knapp

Die Mengenlehre ist mit ihrer Entwicklungsgeschichte und ihren Paradoxien, die man ohne eine entsprechende Axiomatik erhält, ein unglaublich interessantes sowie spannendes Feld. Liebend gerne würde ich mit Begeisterung Erzählungen darüber abliefern, aber dies würde wohl den Sinn und Zweck dieses Kurzskriptes zuwider laufen. Ich verweise aus diesem Grund auf die expliziten Darstellungen in den Werken [1], [2] und [4] und konzentriere mich hier hauptsächlich auf eine erklärende Wiedergabe des Axiomensystems, das man häufig mit ZFC abkürzt. Es ist benannt nach Ernst **Z**ermelo, Abraham Adolf **F**raenkel und dem Axiom of **C**hoice.

Das Axiomensystem, wie wir es hier vorstellen werden, wird auch häufig nach John von **N**eumann, Paul **B**ernays und Kurt **G**ödel benannt und mit NBG abgekürzt. Es ist nur eine leichte Verallgemeinerung des klassischen ZFC-Axiomensystems, aber meiner Meinung nach leichter verständlich. Der Unterschied liegt einzig und allein darin, dass man neben „Mengen“ auch gleichzeitig noch etwas über „Klassen“ erzählt. Mehr dazu gleich.

1 Prädikatenlogik 1. Stufe

Für eine saubere Formulierung der Grundlagen der Mathematik, kommt man nicht darum, eine unmissverständliche Sprache und eine mathematische Logik zu wählen. Wir werden die Axiome in einer sogenannten Sprache 1. Stufe formulieren. Diese benötigt nur die folgende Zeichen:

(1) Quantoren: $\forall \quad \exists$

(2) Junktoren: $\wedge \quad \vee \quad \neg \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

(3) Klammern: ( )

(4) Variablensymbole: $v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad \ldots$

(5) Relationssymbole: $\in$

Man beachte, dass wir kein Gleichheitszeichen in der Sprache erlauben. Das wird zwar häufig getan, aber wir werden es in diesem Skript erst später einführen.

Ein *Ausdruck* ist ein Wort, das mit diesen Symbolen gebildet werden kann, also einfach eine endlich Aneinanderreihung von Symbolen, z. B. $v_8(\exists(\forall$. Wie in der gesprochenen menschlichen Sprachen kann man also auch sinnlose Aneinanderreihungen der Buchstaben bilden. Für die „echten" Wörter in unserer Sprache werden wir einen weitere Bezeichnung verwenden:

Definition 1. Unter einer *Formel* verstehen wir einen Ausdruck $v_i \in v_j$ und Ausdrücke die nach folgendem Prinzip gebildet werden: Wenn φ und ψ Formeln sind, dann bezeichnen wir die folgende Ausdrücke ebenfalls als Formeln:

$$(\varphi) \wedge (\psi)\,,\ (\varphi) \vee (\psi)\,,\ (\varphi) \Rightarrow (\psi)\,,\ (\varphi) \Leftrightarrow (\psi)\,,\ \neg\varphi\,,\ \exists v_i(\varphi)\,,\ \forall v_i(\varphi)\,.$$

Diese so entstandene Sprache bezeichnen wir als die Prädikatenlogik erster Stufe für die Symbolmenge $\{\in\}$ und schreiben dafür kurz $L^{\{\in\}}$.

Nun unterscheidet man in einer Formel sogenannte gebundene und freie Variablen. Dabei sind gebundene Variablen, die durch einen Quantor festgesetzt werden. Gebundene Variablen können durch Umbenennung oder Substitution verändert werden. Wir unterdrücken hier die Details und verweisen zum Beispiel auf [5] oder auch [3].

Wir halten noch folgende Definitionen fest:

Definition 2. Eine Formel heißt *Aussage* oder *Satz*, wenn sie keine freien Variablen besitzt.

Anschaulich sollte die Aussage damit wahr oder falsch sein. Der Wahrheitswert sollte durch logisches Schließen aus dem Axiomensystem zu bestimmen sein. Dies wäre dann ein formaler Beweis in unserer Sprache.

Definition 3. Ein Axiomensystem ist eine endliche oder unendliche Liste von Formeln.

Wir haben nun eine formale Sprache aufgestellt, die Mehrdeutigkeiten oder Unklarheiten ausschließt, sodass wir in dieser unsere Axiome beschreiben können. Die mathematische Logik wird uns dann sagen, welche formale Schlüsse aus den Axiomen zu ziehen sind. Für diese Details verweisen wir wieder auf [3], jedoch wird für das Weitere ein grobes Wissen über die Aussagenlogik völlig ausreichen.

2 Axiome der Mengenlehre

Die anschauliche Auffassung von einer Menge als eine Zusammenfassung von Dingen, sollte man immer im Hinterkopf tragen, aber wir wissen, dass wir beim Aufstellen das Axiomensystems von Null starten müssen. Wir haben also erstmal nichts. Dieses Nichts möchten wir nun füllen.

Es stellt sich heraus, dass es besser ist, mit einem allgemeineren Begriff zu starten. Dieser Begriff lautet *Klasse*. In unserem Universum gibt es nun also nur Objekte $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$, die wir als Klassen bezeichnen. Zwischen je zwei dieser Objekte soll je eine Verbindung $\in$ bestehen, die in unserer Interpretation entweder wahr oder falsch sein kann. Wir schreiben $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ und sagen und denken dafür „$\mathcal{A}$ ist ein Element von $\mathcal{B}$“.

Diese Objekte, dir wir Klassen nennen, und die binäre Verknüpfung $\in$ sind die undefinierten Terme in unserem Universum. Wir wissen nicht, was Klassen eigentlich sind, aber wir werden in der Sprache $L^{\{\in\}}$ ein Axiomensystem formulieren, das die gewünschten Eigenschaften über diese Objekte festschreibt. Als Variablensymbole ersetzen wir v_i immer durch ansprechende Buchstaben, wie $x, y, z, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, A, B, C$ usw.

Um ein übersichtliches Axiomensystem in der formalen Sprache zu erhalten, werden wir immer wieder Abkürzungen einführen, die für eine Formel in der Sprache stehen. Wir verwenden dafür das Symbol $\equiv_{def}$, um hervorzuheben, dass eine Formel nur zu besseren Lesbarkeit ersetzt wurde. Wir beginnen mit einer grundlegenden Abkürzung:

$$\mathcal{A} \notin \mathcal{B} \quad \equiv_{def} \quad \neg(\mathcal{A} \in \mathcal{B})$$

Und sprechen dies als „$\mathcal{A}$ ist kein Element von $\mathcal{B}$".

Wir starten zuerst mit einer Definition:

Definition 4. Ein Element einer Klasse nennen wir eine *Menge*. Oder anderes gesagt: Wir schreiben „B ist Menge" für die Formel

$$\exists \mathcal{A}\,(B \in \mathcal{A})$$

Da wir nur Klassen in unserem Universum zugelassen haben, sind Mengen per definitionem bestimmte Klassen. Die Vorstellung soll demnach einfach sein, dass Mengen „kleine" Klassen sind.

Da wir, wie zu Beginn erwähnt, keine Gleichheit in unserer Sprache als Symbol eingeführt haben, brauchen wir nun die folgende Definition:

Definition 5. Wir nennen zwei Klassen *gleich*, wenn jegliche Elementbeziehungen für alle anderen Klassen übereinstimmen. Genauer:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \quad \equiv_{def} \quad \forall \mathcal{C}(\mathcal{A} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{C}) \wedge \forall C(C \in \mathcal{A} \Leftrightarrow C \in \mathcal{B})$$

Es bieten sich nun auch die folgenden Kurzschreibungen an. Wir schreiben für eine Formel φ:

$$\forall x \in y\; \varphi \quad \equiv_{def} \quad \forall x\,(x \in y \Rightarrow \varphi)$$

$$\exists x \in y\; \varphi \quad \equiv_{def} \quad \exists x\,(x \in y \wedge \varphi)$$

$$\forall x, y\; \varphi \quad \equiv_{def} \quad \forall x \forall y\; \varphi$$

0. Axiom - EXIST

Wir geben unserem „ersten“ Axiom die Bezeichnung Null, um anzudeuten, dass es letztendlich entbehrlich sein wird. Im Allgemeinen werden wir nicht versuchen ein möglichst kurzes Axiomensystem aufzustellen, sondern ein gut verständliches. Bis auf dieses Nullte Axiom stimmt unser System mit dem üblich vorgestellten ZFC-System bzw. dem NBG-System überein, welche allerdings auch noch redundant sind. Einiges kann man schon aus den Definitionen und Axiomen der formalen Logik folgern, sodass man diese nicht nochmals in der Mengenlehre fordern muss.

Das nullte Axiom soll erstmal festhalten, das unser Universum nicht komplett leer ist. Dies macht das Verständnis der folgenden Axiome einfacher, da man weiß, dass es auf jeden Fall auch Objekte gibt, von denen man das weitere fordert. Am Ende wird man erkennen, dass diese Existenz schon aus einer leichten Kombination von zwei Axiomen folgt.

0. Existenz einer Klasse und Menge: Es existiert eine Klasse und eine Menge, wobei diese Menge ein Element der Klasse ist.

$$\exists \mathcal{A}\ \exists x\,(x \in \mathcal{A})$$

1. Axiom - EXT

Das nun folgende echte erste Axiom soll die Anschauung festhalten, dass eine Menge bzw. eine Klasse schon durch ihre Elemente festgelegt ist.

1. Extensionalitätsaxiom: Zwei Klassen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}\,\Big(\mathcal{A} = \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in \mathcal{B})\Big)$$

Man sollte bemerken, dass eine der Implikationen schon durch die Definition von $=$ gegeben ist. Das Extensionalitätsaxiom besagt demnach, dass wir die Gleichheit alleine auf die „linksseitige“ Elementbeziehung zurückführen können. Unsere Anschauung ist hier natürlich, dass eine Klasse oder Menge nun genau eine Zusammenfassung von Dingen ist und genau diese Dinge alleine sollen die Klasse letztendlich festlegen.

2. Axiom - KOM

Bisher schien es noch überhaupt nicht notwendig eine formale Sprache einzuführen, denn wir konnten alles eindeutig in einer Alltagssprache ausdrücken. Das ändert sich jedoch sofort, sobald wir neue Mengen bzw. Klassen nach gewissen Eigenschaften bilden möchte. Möchten wir alle Objekte zusammenführen, die bestimmte Bedingungen erfüllen, so ist unsere Alltagssprache zu ungenau und wir können nicht unterscheiden zwischen „erlaubten“ und „unerlaubten“ Eigenschaften, die wir an die Objekte stellen dürfen. Die formale Sprache $L^{\{\in\}}$ hilft uns dort sehr, denn es ist nun alles erlaubt, was sich in der Sprache ausdrücken lässt.

2. Komprehensionsaxiom (auch: Aussonderungsaxiom): Zu jeder Eigenschaft, die sich als eine Formel φ in $L^{\{\in\}}$ formulieren lässt, gibt es eine Klasse, die genau die Mengen als Elemente besitzt, für welche die Eigenschaft zutrifft.

$$\forall v_1, \ldots, v_n \; \exists \mathcal{A} \; \forall x \; \Big(x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\varphi(x, v_1, \ldots, v_n) \wedge x \text{ ist Menge})\Big)$$

Oder komplett formal:

$$\forall v_1, \ldots, v_n \; \exists \mathcal{A} \; \forall x \; \Big(x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (\varphi(x, v_1, \ldots, v_n) \wedge \exists \mathcal{B}(x \in \mathcal{B})\Big)$$

Hier soll die Formel φ genau $x, v_1, \ldots, v_n$ als freie Variablen enthalten.

Man sollte ebenfalls beachten, dass das Axiom für jede Formel φ gilt, sodass man hier in der Tat unendlich viele Axiome verpackt hat. Man spricht häufig von einem Axiomenschema.

Definition 6. Wenn φ die Formel $x = x$ ist, so nennen wir die Klasse $\mathcal{A}$, die nach dem obigen Axiom existiert und nach dem Extensionalitätsaxiom auch eindeutig ist, die All-Klasse $\mathcal{V}$. Diese zeichnet sich also durch

$$x \in \mathcal{V} \;\Leftrightarrow\; (x = x \;\wedge\; x \text{ ist Menge})$$

aus. Dies bedeutet, dass $\mathcal{V}$ gerade die Klasse aller Mengen ist.

Für jede andere Formel φ führen wir nun die folgende Abkürzung für die Klasse $\mathcal{A}$ aus dem obigen Axiom ein:

$$\{x \in \mathcal{V} \mid \varphi(x, v_1, \ldots, v_n)\}$$

Auch hier gilt: Die Klasse existiert nach dem obigen Axiom und ist nach dem Extensionalitätsaxiom auch eindeutig bestimmt. Wenn die Formel φ schon die Eigenschaft umfasst, dass x eine Menge ist, dann schreiben noch kürzer:

$$\{x|\varphi(x, v_1, \ldots, v_n)\}$$

für die Klasse $\mathcal{A}$ aus dem Komprehensionsaxiom.

Das Komprehensionsaxiom erlaubt uns nun die Konstruktion von verschiedenen Klassen. Wir haben natürlich noch nicht geklärt, wann eine durch eine Eigenschaft φ definierte Klasse auch eine Menge ist, denn dies sollen erst weitere Axiome übernehmen.

Definition 7. Wir schreiben abkürzend $x \neq y$ für $\neg(x = y)$ und definieren die *leere Klasse* $\emptyset$ durch:

$$\{x \in \mathcal{V} \mid x \neq x\}$$

Die leere Klasse hat in unserer Interpretation keine Elemente, da $x = x$ eine Tautologie ist. Andererseits enthält die All-Klasse $\mathcal{V}$ alle Mengen unsere Universums, ist aber in der Tat selbst keine Menge, sondern eine echte Klasse, was wir gleich noch zeigen werden.

Wir gehen nun auf eine wichtige Bildung einer Klasse ein, die als *Russellsche Klasse* bezeichnet wird, da Bertrand Russell sie als Paradoxon in der damaligen Mengenlehre vorstellte.

Satz 8. *Die Klasse* $\{x \in \mathcal{V} \mid x \notin x\}$ *ist eine echte Klasse, also keine Menge.*

Beweis. Bezeichnen wir die Klasse $\{x \in \mathcal{V} \mid x \notin x\}$ mit $\mathcal{R}$, so gilt für jede beliebige Menge A:

$$A \in \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad A \notin A$$

Wäre nun $\mathcal{R}$ eine Menge so müsste die obige Äquivalenz auch für $\mathcal{R}$ gelten, d. h.:

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

Ein logischer Widerspruch, sodass $\mathcal{R}$ keine Menge ist, sondern eine echte Klasse. □

Nun führen wir ein paar Bezeichnungen ein:

Definition 9. Für zwei Klassen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ abkürzend für

$$\forall x(x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in \mathcal{A})$$

und sagen, dass $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist oder dass $\mathcal{B}$ eine *Teilklasse* von $\mathcal{A}$ ist.

Nach dem Komprehensionsaxiom können wir durch eine beschriebene Eigenschaft neue Klassen bilden. Es bietet sich nun an, den *Durchschnitt*, *Vereinigung* und das *Komplement*, welche wir uns anschaulich vorstellen können, einzuführen. Wir schreiben ab sofort $:=$ bzw. $=:$, wenn wir eine neue Kurzbezeichnung für eine neue Klasse einführen.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cup \mathcal{B} &:= \{x|x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\} \\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} &:= \{x|x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\} \\ \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} &:= \{x|x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\} \\ \mathcal{A}^c &:= \{x \in \mathcal{V} \mid x \notin \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

3. Axiom - LM

Da wir bisher mit allgemeinen Klassen hantiert haben, konnten wir leicht feststellen, dass unser Universum einige Klassen beherbergt und auch beliebig neue Klassen mit dem Komprehensionsaxiom finden. Eine Menge konnte wir jedoch noch nicht angeben, aber diese sind nötig um neue Klassen nach dem Komprehensionsaxiom zu bilden.

3. Leermengenaxiom: Die leere Klasse $\emptyset$ ist eine Menge.

$$\emptyset \in \mathcal{V}$$

Mit der Anschauung, dass Mengen gerade „kleine“ Klassen sein sollten, sollte das also mindestens auf die Klasse ohne Elemente zutreffen. Kleiner geht es ja wirklich nicht.

4. Axiom - PA

4. Paarmengenaxiom: Die Klasse die genau ein oder zwei Mengen als Elemente enthält ist eine Menge.

$$\forall y, z \in \mathcal{V} \quad \{x \in \mathcal{V} \mid x = y \vee x = z\} \in \mathcal{V}$$

Für diese gebildete Paarmenge, die nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt ist, schreiben wir ab sofort:

$$\{y, z\} := \{x \in \mathcal{V} \mid x = y \vee x = z\} \text{ bzw. } \{y\} := \{y, y\}$$

Das Paarmengeneaxiom besagt, dass die wir so wieder eine Menge erhalten und eben keine echte Klasse. Auch hier spielt die Anschauung von „kleinen“ Klassen mit.

5. Axiom - VER

Für eine Klasse $\mathcal{A}$ definieren wir die „große" Vereinigung als die gewöhnliche Vereinigung ihrer Elemente, d. h.

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x | \exists A \in \mathcal{A} \quad x \in A\}$$

Es werden also alle Mengen in $\mathcal{A}$ vereinigt. Das nächste Axiom soll nun festhalten, dass wir auf diese Art auch wieder eine Menge erhalten, solange $\mathcal{A}$ eine Menge ist.

5. Vereinigungsaxiom: Zu jeder Menge A existiert eine Menge B, deren Elemente genau die Elemente der Elemente von A sind.

$$\forall A \in \mathcal{V} \quad \bigcup A \in \mathcal{V}$$

Vereinigungen, welche innerhalb einer Menge stattfinden, sollen also auch wieder Mengen ergeben. Anschaulich bleibt also alles klein genug.

6. Axiom - AUSM

Wenn A eine Menge ist, so wollen wir, dass die Teilklassen $B \subset A$ auch Mengen sind. Dazu müssen wir das Komprehensionsaxiom um diese Information erweitern.

6. Aussonderungsmengenaxiom: Eine Teilklasse einer Menge, ist wieder eine Menge

$$(A \in \mathcal{V}) \wedge (B \subset A) \Rightarrow B \in \mathcal{V}$$

In Axiomensystemen, die den allgemeinen Begriff *Klasse* nicht benutzen, kann man AUSM leicht in KOM eingliedern. Da wir jedoch das Komprehensionsaxiom so allgemein gehalten haben, dass wir auch echte Klassen bilden können, müssen wir noch ein zusätzliches Aussonderungsaxiom für Mengen hinzufügen.

Satz 10. *Der Schnitt einer Klasse mit einer Menge, ist wieder eine Menge.*

$$A \in \mathcal{V} \Rightarrow A \cap \mathcal{B} \in \mathcal{V}$$

für jede Klasse $\mathcal{B}$.

Beweis. Es gilt die Inklusion $A \cap \mathcal{B} \subset A$. Nach AUSM ist $A \cap \mathcal{B}$ also eine Menge. $\square$

7. Axiom - POT

Wenn A eine Menge ist, so nennen wir die Teilklassen $B \subset A$ üblicherweise *Teilmengen*, denn nach dem obigen Aussonderungsmengenaxiom sind dies wirklich Mengen.

7. Potenzmengenaxiom: Die Klasse aller Teilmengen einer Menge ist wieder eine Menge.

$$\forall A \in \mathcal{V} \quad \{x | x \subset A\} \in \mathcal{V}$$

Wir setzen $P(A) := \{x|x \subset A\}$ und nennen Sie die *Potenzmenge von* A.

8. Axiom - FUN

Das nächste Axiom soll die Vorstellung abbilden, dass eine Menge oder Klasse nicht unendlich nach innen verschachtelt werden kann.

8. Fundierungsaxiom: Jede Klasse $\mathcal{A} \neq \emptyset$ hat ein Element B, welches mit $\mathcal{A}$ kein Element gemeinsam hat.

$$\forall \mathcal{A} \left(\mathcal{A} \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \exists B \in \mathcal{A} \ (\mathcal{A} \cap B = \emptyset) \right)$$

9. Axiom - ERS

Für das nächst Axiom benötigen den Begriff einer Funktion. Dazu führen wir den Begriff des geordneten Paars ein. Für zwei Mengen $x, y \in \mathcal{V}$ definieren wir

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Nach dem Paarmengenaxiom ist dies als Menge definiert, d. h. $(x, y) \in \mathcal{V}$.

Weiterhin definieren wir das kartesische Produkt von zwei Klassen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ als:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{x | x = (A, B) \ \wedge \ A \in \mathcal{A} \ \wedge \ B \in \mathcal{B}\}$$

Beachte, dass für zwei Mengen C, D nach dem Vereinigungsaxiom auch $C \times D$ eine Menge bildet.

Definition 11. Ein *funktionale Klasse* ist eine Teilklasse $\mathcal{F} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ mit der Eigenschaft:

$$(x, y), (x, z) \in \mathcal{F} \ \Rightarrow \ y = z$$

für alle Mengen x, y, z.

Üblicherweise schreiben wir

$$\mathcal{F}(x) = y \quad \equiv_{def} \quad (x, y) \in \mathcal{F}$$

für eine funktionale Klasse $\mathcal{F}$.

Eine weitere wichtige Definition ist:

Definition 12. Für eine funktionale Klasse $\mathcal{F}$ definieren wir den Definitionsbereich

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{F}) := \{x | \exists y \ F(x) = y\}$$

und das Bild der funktionalen Klasse $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{Ran}(\mathcal{F}) := \{y | \exists x \ F(x) = y\}$$

Für eine Teilklasse $A \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{F})$ schreiben wir auch

$$\mathcal{F}[A] := \{y | \exists x \in A \; F(x) = y\}$$

und nennen diese Klasse das *Bild von A unter $\mathcal{F}$*.

Üblicherweise schreibt man für eine funktionale Klasse

$$\mathcal{F} : \mathrm{Dom}(\mathcal{F}) \to \mathcal{B}$$

wobei $\mathcal{B}$ irgendeine Klasse mit $\mathrm{Ran}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}$ ist.

Aufgrund der Definition einer funktionalen Klasse als eine übliche Abbildungsvorschrift „von links nach rechts“, scheint es sinnvoll zu fordern, dass solche Abbildungen Mengen wieder auf Mengen abbilden:

9. Ersetzungsaxiom: Das Bild einer Menge unter einer funktionalen Klasse ist auch eine Menge.

$$\forall \mathcal{F} \;\; \forall B \in \mathcal{V} \; (\mathcal{F} \text{ funktionale Klasse } \;\; \Rightarrow \;\; F[B] \in \mathcal{V})$$

10. Axiom - UN

Das nächste Axiom soll festhalten, dass wir mindestens eine unendliche Menge vorliegen haben. Dieses ist demnach stärker als das nullte Axiom EXIST, welches wir, wie schon angesprochen, auch weglassen könnten.

10. Unendlichkeitsaxiom: Es existiert eine Menge, welche die leere Menge enthält und mit jedem Element x auch $x \cup \{x\}$ als Element enthält.

$$\exists A \in \mathcal{V} \;\; \big(\emptyset \in A \;\wedge\; (x \in A \;\Rightarrow\; x \cup \{x\} \in A)\big)$$

11. Axiom - AC

Für das letzte Axiom benötigen wir nochmals den Funktionenbegriff. Für das Ersetzungsaxiom haben wir den Begriff der funktionalen Klasse eingeführt. Wenn eine funktionale Klasse eine Menge ist, so sprechen wir einfach von einer *Funktion*. Wir definieren:

$$\mathcal{A}^{\mathcal{B}} := \{F \in \mathcal{V} \mid F : \mathcal{B} \to \mathcal{A} \text{ funktionale Klasse}\}$$

$\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ ist also die Klasse aller Funktionen mit $\mathrm{Dom}(F) = \mathcal{B}$ und $\mathrm{Ran}(F) \subset \mathcal{A}$.

Wir beweisen nun zuerst den folgenden Satz

Satz 13. *Für jede Funktion $F \in \mathcal{V}$ ist der Definitionsbereich eine Menge.*

Beweis. Eine Funktion erfüllt $F \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ und $F \in \mathcal{V}$. Nun gilt für $(x, y) \in F$:

$$\{x, y\} = \bigcup (x, y) \subset \bigcup\bigcup F$$

Dies folgt leicht aus der Definition des geordneten Paars. Die obige Gleichung bedeutet nun aber andererseits auch:

$$x \in \bigcup\bigcup F$$

Da nun die Vereinigung von Mengen nach VER immer auch eine Menge liefert, erhalten wir aus

$$\mathrm{Dom}(F) \subset \bigcup\bigcup F \ ,$$

was aus der obigen Gleichung folgt, und dem Aussonderungsmengenaxiom sofort die Behauptung. □

Für eine Menge I und ein $F \in \mathcal{V}^I$ definieren wir das allgemeine kartesische Produkt

$$\bigtimes_{i \in I} F(i) := \left\{ f \;\middle|\; f : I \to \bigcup_{i \in I} F(i) \;\wedge\; f(i) \in F(i) \right\}$$

Das kartesische Produkt beschreibt also Funktionen, die für jedes $i \in I$ je einen Vertreter aus $F(i)$ auswählen. Für eine Menge $I = \{a, b\}$ mit zwei Elementen stimmt diese Konstruktion im Wesentlichen mit dem kartesischen Produkt $F(a) \times F(b)$ überein, denn es gilt:

$$\bigtimes_{i \in \{a,b\}} F(i) = \{a\} \times F(a) \cup \{b\} \times F(b)$$

Demnach kann man für jede endliche Menge I sofort solch eine Auswahlfunktion angeben, wenn die Mengen $F(i)$ nicht leer sind. Man muss dazu nur das Paarmengenaxiom endlich oft anwenden, um zu erkennen, dass das allgemeine kartesische Produkt nicht leer ist. Für unendliche Mengen I folgt dies aber nicht aus den anderen Axiomen, sodass man dies fordern muss:

11. Auswahlaxiom: Für jede Menge von nicht-leeren Mengen gibt es eine Auswahlfunktion.

$$\forall I \in \mathcal{V} \ \ \forall F \in \mathcal{V}^{\mathcal{I}} \ \Big((\forall i \in I \ F(i) \neq \emptyset) \ \Rightarrow \ \bigtimes_{i \in I} F(i) \neq \emptyset \Big)$$

Literatur

[1] Bartsch, René. Allgemeine Topologie. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015.

[2] Deiser, Oliver. Einführung in die Mengenlehre. Vol. 3. Springer, 2002.

[3] Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum, und Wolfgang Thomas. Einführung in die mathematische Logik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1978.

[4] Friedrichsdorf, Ulf, und Alexander Prestel. Mengenlehre für den Mathematiker. Springer-Verlag, 2013.

[5] Kunen, Kenneth. Set theory an introduction to independence proofs. Vol. 102. Elsevier, 2014.