Lösen von Differentialgleichungen

Inhaltsverzeichnis

1 Über die allgemeine komplexe und reelle Lösung

Heute möchte ich etwas über Berechnung von Fundamentalsystemen von lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten erzählen. Oft beginnen Aufgabenstellungen so:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 6y' + 34y = 0 \tag{1}$$

Nun hat man also eine wunderbare lineare Differentialgleichung gegeben und soll in einem gewissen Sinne alle Lösungen dieser bestimmen. So gut wie immer ist man aber nur an reellen Lösungen interessiert, denn die meisten Differentialgleichungen stammen von Problemen aus der Natur oder Technik, deren selbstverständlich reelle Zahlen sind. Deswegen möchte man alle *reellwertigen* Lösungen der Differentialgleichung herausfinden und genau so ist die obige Aufgabenformulierung auch zu verstehen.

Es stellt sich nun aber heraus, dass es viel leichter ist einfach alle komplexen Lösungen einer linearen Differentialgleichung zu bestimmen. Dann muss man jedoch wissen, welche von diesen nun wirklich die reellen Lösungen sind. Genau dies möchte in diesem Artikel ausführlich vorführen, sodass der Leser danach die allgemeine Lösung einer beliebigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten angeben kann.

Voraussetzungen: Die Differentialgleichung ist von n-ter Ordnung, d. h. die höchste Ableitung, die in der Gleichung vorkommt, ist $y^{(n)}$ und die Koeffizienten vor der Funktion y und den Ableitungen sind konstante Zahlen. Dann wissen wir nach dem Satz von Picard-Lindelöf, dass der Lösungsraum n-dimensional ist. Oder einfacher ausgedrückt: Die allgemeine Lösung muss genau n frei wählbare Konstanten besitzen.

1. Schritt: Ansatz: Wir setzen den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ an und schauen, ob es eine Lösung von dieser Form geben kann. Da die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung ist, scheint dies ein sowohl einfacher als auch sinnvoller Ansatz zu sein. Setzen wir diesen in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir:

$$(\lambda^2 - 6\lambda + 34)e^{\lambda x} = 0$$

Diese Gleichung soll nun für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt sein. Jedoch kann die Exponentialfunktion niemals Null sein, sodass wir eine Bestimmungsgleichung für λ erhalten:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$$

Letztendlich erhält man auf diese Weise immer ein Polynom, dessen Nullstellen gesucht sind.

2. Schritt: Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen: Das obige Polynom, was einfach dadurch entsteht, indem man $y^{(k)}$ durch λ^k in der Differentialgleichung ersetzt, nennt man das *charakteristischen Polynom* der Differentialgleichung. Und nun muss man nur noch alle komplexen Nullstellen bestimmen. In diesem Fall ergeben sich die zwei komplexen Nullstellen

$$\lambda_\pm = 3 \pm 5\mathrm{i} \ .$$

3. Schritt: Lösungen aufschreiben: Durch das Finden der Nullstellen haben wir nun auch entsprechen unserem Ansatz Lösungen der Differentialgleichung gefunden, nämlich:

$$y_1(x) = e^{3x} e^{\mathrm{i}5x} \ , \qquad y_2(x) = e^{3x} e^{-\mathrm{i}5x} \ .$$

Dies sind aufgrund der verschiedenen Exponenten auch zwei verschiedene Lösungen, sodass wir beliebige Linearkombinationen bilden können und dies gibt uns auch die allgemeine Lösung. Jedoch sind sowohl y_1 als auch y_2 erst mal wirklich komplexwertige Lösungen, sodass wir noch nicht ganz fertig sind.

4. Schritt: Allgemeine komplexe Lösung: Diese lautet nun:

$$y(x) = e^{3x} (A e^{\mathrm{i}5x} + B e^{-\mathrm{i}5x}) \ , \quad A, B \in \mathbb{C} \ .$$

Ganz wichtig ist nun, dass die frei wählbaren Koeffizienten auch komplexe Zahlen darstellen können. Die Anzahl dieser Zahlen muss genau der Ordnung der Differentialgleichung entsprechen. In diesem Fall also 2.

5. Schritt: Allgemeine reelle Lösung: In der allgemeinen komplexen Lösung sind natürlich auch rein reelle Lösungen zu finden und genau diese möchten wir nun herausfiltern. Dazu müssen wir nur wissen, dass eine reelle Lösung zu sich selbst komplex konjugiert sein muss, d. h.

$$\overline{y(x)} = y(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \,.$$

Setzen wir dort die obige Form ein, erhalten wir die Gleichung

$$\overline{A}e^{-\mathrm{i}5x} + \overline{B}e^{\mathrm{i}5x} = Ae^{\mathrm{i}5x} + Be^{-\mathrm{i}5x}$$

und daraus folgt

$$\overline{A} = B \quad \text{und} \quad \overline{B} = A \,.$$

Das ist also die richtige Bedingung, die unsere Lösung reell macht. Dies setzen wir nun ein und formen mit Hilfe der Euler'schen Formel ein wenig um:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{3x}(Ae^{\mathrm{i}5x} + \overline{A}e^{-\mathrm{i}5x}) \\ &= e^{3x}(A\cos(5x) + \mathrm{i}A\sin(5x) + \overline{A}\cos(5x) + \mathrm{i}\overline{A}\sin(5x)) \\ &= e^{3x}\Big[(A+\overline{A})\cos(5x) + \mathrm{i}(A-\overline{A})\sin(5x)\Big] \,. \end{aligned}$$

Da nun

$$A + \overline{A} = 2\,\mathsf{Re}(A) \quad \text{und} \quad \mathrm{i}(A - \overline{A}) = -2\,\mathsf{Im}(A)$$

gilt, haben wir vor dem Kosinus und dem Sinus zwei unabhängige *reelle* Zahlen stehen, die wir nun auch einfach mit C und D bezeichnen können.

Wir erhalten demnach die allgemeine reelle Lösung in folgender Form:

$$y(x) = e^{3x}\Big[C\cos(5x) + D\sin(5x)\Big] \,, \quad C, D \in \mathbb{R} \,.$$

Wiederum wichtig hier, dass man genau zwei frei wählbare Konstanten hat.

Kurze Merkregel: Diese Umrechnung der komplexen in die reelle Lösung war natürlich nur zur Erklärung und Anschauung gedacht, denn in einer Aufgabe, die man bearbeitet, kann man mit dem obigen Wissen direkt auf den Kosinus und Sinus schließen. Oder kurz gesagt:

Taucht in der komplexen Lösung $e^{\mathrm{i}\mu x}$ und $e^{-\mathrm{i}\mu x}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ auf, so kann man diese durch $\cos(\mu x)$ und $\sin(\mu x)$ ersetzen, falls man dann nur noch reelle Koeffizienten zulässt. So erhält man sofort die allgemeine reelle Lösung.

2 Integrierender Faktor

Jeder, der sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigt, muss wissen, wie man eine einfache lineare Differentialgleichung löst. Nun ist man entweder theoretisch oder praktisch an Differentialgleichungen interessiert und vor allem im letzteren Fall sollte man einprägsame Methoden zur Lösung von gegebenen Differentialgleichungen kennen. Hat man zum Beispiel eine Differentialgleichung in einer Dimension gegeben,

$$y'(x) = \sin(x)(y(x) + \cos(x)) \ , \tag{2}$$

so erkennt man schnell die Linearität und hat folgendes Lösungsschema im Kopf: *Erst die homogene Gleichung lösen und dann mit der Variation der Konstanten eine spezielle Lösung finden*. Ja, okay. Das funktioniert natürlich und ist für theoretische Argumente hilfreich, aber wenn man wirklich explizit rechnet, gibt es ein besseres Verfahren, was sich auch problemlos verallgemeinern lässt: *Das Verfahren des integrierenden Faktors*.

Dies möchte ich in diesem Artikel vorstellen und zwar zuerst an Beispiel (2) und dann kurz das allgemeine Vorgehen.

2.1 Eine Beispielrechnung

Die obige Differentialgleichung sollte man zuerst mal in die Standardgestalt bringen, d. h. alle y-Terme nach links und der heterogene Anteil nach rechts:

$$y'(x) - \sin(x)y(x) = \sin(x)\cos(x) \ . \tag{3}$$

Die Idee ist nun ganz einfach. Auf der linken Seite steht die Ableitung von y und y selbst, getrennt nur von einer Addition. Nun kennt man ja die Produktregel, die für zwei Funktionen h und y lautet:

$$\frac{d}{dx}(h \cdot y) = h'y + hy' \ .$$

Auf der rechten Seiten taucht also genau die genannte Summe von y und y' auf, während sich die rechte Seite ganz schnell integrieren lässt. Und genau das möchte ja man bei Differentialgleichungen. Die Ableitung soll durch eine Integration verschwinden, sodass man eine Gleichung für den Funktionsausdruck y erhält.

Nun ist also nur die Hilfsfunktion h zu finden, damit man diese Umformung durchführen kann. Der Faktor vor y in Gleichung (3) ist aber genau der Faktor, um den sich die Ableitung h' und h selbst unterscheiden. Dies sieht man nach der genannten Produktregel und Gleichung (3).

Nun benötigt man den integrierenden Faktor. Wir multiplizieren Gleichung (3) auf beiden Seiten mit

$$e^{\cos(x)} \ ,$$

während der Exponent eine Stammfunktion des Faktors vor y sein muss. Warum dies funktioniert, sehen wir sofort:

$$\underbrace{e^{\cos(x)}}_{h(x)} y'(x) \underbrace{- \sin(x) e^{\cos(x)}}_{h'(x)} y(x) = \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)} \ .$$

Die Eigenschaft der Exponentialfunktion, nämlich $(e^x)' = e^x$, liefert also genau das Gewünschte, denn die innere Ableitung bringt den Zusatzfaktor zum Vorschein. Nun schreiben wir die Differentialgleichung wie folgt

$$\frac{d}{dx}(e^{\cos(x)} \cdot y(x)) = \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)}$$

und führen auf beiden Seiten eine unbestimmte Integration durch:

$$e^{\cos(x)} y(x) = \int \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)} dx + C \ .$$

Wie man sieht muss man nun nur noch ein einziges Integral lösen. Mit der passenden Substitution erhält man leicht

$$\int \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)}dx = -e^{\cos(x)}(\cos(x) - 1)$$

und somit als Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = 1 - \cos(x) + Ce^{-\cos(x)}\,, \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

2.2 Das allgemeine Vorgehen

Immer wenn man eine eindimensionale lineare Gleichung in die Form

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{4}$$

bringen kann, so ist das Verfahren des integrierenden Faktors anwendbar. Man wählt den integrierenden Faktor einfach als

$$e^{A(x)} \quad \text{mit } A(x) \text{ eine Stammfunktion von } a(x)\ .$$

Diesen multipliziert man mit der Gleichung und hat die Lösung dann in folgender Form stehen

$$e^{A(x)}y(x) = \int b(x)e^{A(x)}dx + C\ .$$

Der Vorteil an diesem Vorgehen ist natürlich nicht diese Lösungsformel, denn die erhält man auch mit anderen Mitteln und könnte auch einfach gemerkt und angewendet werden, sondern, dass man sich absolut nichts merken muss. Man muss nur wissen, dass man durch Umformen auf die oben genannte Form kommt, sodass man nur noch integrieren muss.

3 Nicht-lineare Differentialgleichungen mit integrierendem Faktor lösen

In einem früheren Abschnitt haben wir das Vorgehen für das Lösen einer linearen Differentialgleichungen mit Hilfe eines integrierendem Faktor erklärt. Nun stellt sich heraus, dass es auch für nicht-lineare Differentialgleichungen ein Lösungsverfahren gibt, was den gleichen Namen trägt. Das ist auch nicht überraschend, denn man versucht die Differentialgleichung so abzuändern, nämlich durch Multiplizieren eines geeigneten Faktors, um diese dann *integrieren* zu können.

Beide Verfahren unterscheiden sich aber durchaus sehr, sodass wir hier etwas weiter ausholen müssen.

3.1 Umschreiben der Differentialgleichung mit Differentialformen

Zuallererst diskutieren wir kurz das Ausdrücken einer Differentialgleichung durch sogenannte *Differentialformen*. Haben wir eine Differentialgleichung in der Form

$$p(x,y) + q(x,y)y' = 0 \tag{5}$$

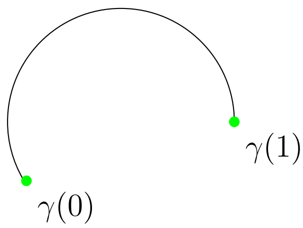
mit stetig differenzierbaren Funktionen p und q gegeben, so können wir diese auch anders ausdrücken. Wir werden uns dazu folgende Merkregel anschauen: Schreibe die Ableitung als dy/dx und multipliziere mit dx auf beiden Seiten. Man erhält dann

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0\ . \tag{6}$$

Diese Umformung ist natürlich mathematischer Nonsens und der erhaltene Ausdruck ergibt fürs Erste überhaupt keinen Sinn. Nun stellt sich jedoch heraus, dass man die linke Seite aber durchaus sauber definieren kann und diese bezeichnet man dann als eine *Differentialform*.

An dieser Stelle ist nicht wichtig, was eine Differentialform eigentlich wirklich ist, wie man sie genau definiert und warum dies ein interessanter Begriff ist. Da wir uns mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen, reicht es aus, dass man weiß, dass es solche wohldefinierten Objekte dx und dy gibt, mit der man Gleichung (6) formulieren kann. Diese Objekte sollen nun die folgende Eigenschaft haben: Nehmen wir eine Kurve in der Ebene, d. h. eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} ,$$



so kann man diese auf die Differentialform $a(x,y)dx + b(x,y)dy$ anwenden und erhält eine neue Differentialform

$$\Big[p(\gamma(t))\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big]\, dt \ .$$

Man sagt nun, dass das die Differentialform $a(x,y)dx + b(x,y)dy$ längs der Kurve γ verschwindet, wenn

$$p(\gamma(t))\gamma_1'(t) + q(\gamma(t))\gamma_2'(t) = 0$$

für alle $t \in [a,b]$ gilt.

In diesem Sinn ist nun auch Gleichung (6) zu verstehen. Man sucht passende Kurven, auf denen diese Differentialform verschwindet. Da die Objekte dx und dy beim Einsetzen der Kurve γ in gewöhnliche Ableitungen übergehen, kann man in der Gleichung auch eine gut gewählte Abkürzung sehen und muss den Begriff der Differentialform nicht tief gehend verstanden haben. Auf diese Sichtweise einigen wir uns auch in diesem Artikel.

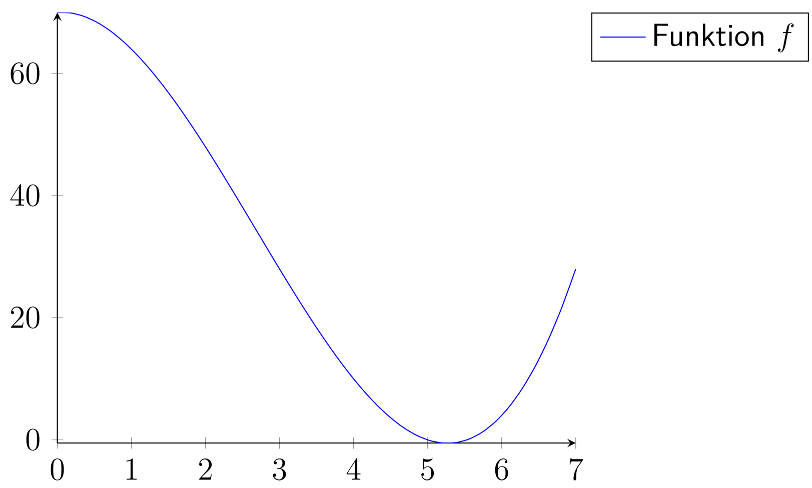
3.2 Lösungsbegriffe

In vorherigen Abschnitt haben wir eine Differentialgleichung erfolgreich in eine Differentialform umgeschrieben. Nun ist aber absolut nicht klar, was wir damit überhaupt gewonnen haben. Wir werden nun gleich sehen, dass die Lösungsbegriffe von Gleichung (5) und Gleichung (6) eng zusammenhängen.

Dazu betrachten wir nun eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung, d. h. es gilt

$$p(x, f(x)) + q(x, f(x))f'(x) = 0\,, \quad x \in I\ .$$

Nun können wir den Graph der Funktion als eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ auffassen:



$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

und die Kurve auf die Differentialform anwenden. Wir erhalten:

$$p(\gamma(x))\gamma_1'(x) + q(\gamma(t))\gamma_2'(x) = p(x, f(x)) \cdot 1 + q(x, f(x))f'(x) = 0\ .$$

Das heißt die Kurve verschwindet längs γ oder anders gesagt: Eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (5) bringt uns auch eine Lösung von (6).

Auf ähnliche Weise kann man sich auch die Umkehrung überlegen. Wir schließen also in jedem Fall, dass zum Finden einer Lösung der Differentialgleichung auch äquivalent die Gleichung der Differentialform betrachtet werden kann.

Wir werden sehen, dass man mit der Differentialform manchmal einfacher argumentieren kann, sodass diese Umformung von (5) zu (6) durchaus einen rechnerischen Vorteil bringt.

3.3 Exakte Differentialgleichung

Wir werden nun zeigen, dass sogenannte *exakte* Differentialgleichungen, manchmal auch als *vollständige* Differentialgleichungen bezeichnet, sehr leicht zu behandeln sind. Deswegen erklären wir nun zuerst die Definition:

Eine Differentialgleichung in der Form

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0 \ . \tag{7}$$

heißt *exakt*, wenn es eine „Stammfunktion“ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, mit

$$F_x = p \, , \quad F_y = q \ .$$

Nach dem Satz von Schwarz muss also in jedem Fall

$$p_y = F_{xy} = F_{yx} = q_x \tag{8}$$

gelten. Man kann nun auch zeigen, dass diese Bedingung hinreichend ist, d. h. die Überprüfung von Gleichung (8) zeigt, ob die Differentialgleichung exakt oder nicht exakt ist.

3.4 Was bringen exakte Differentialgleichungen?

Nun ist eine berechtigte Frage, was für einen Vorteil eine exakte Differentialgleichung hat. Aus diesem Grund wenden wir eine beliebige Lösungskurve γ

an:

$$F_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) = 0$$

Mit Hilfe der Kettenregel können wir dies umschreiben als:

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = 0 \ .$$

Das heißt aber nichts anderes als, dass eine Lösungskurve in einer Niveaulinie von F liegen muss:

$$F(\gamma(t)) = c\,, \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \ .$$

Der Vorteil einer exakten Differentialgleichung ist also enorm. Wir müssen nur eine Stammfunktion F finden, und können Lösungskurven sofort als Niveaulinien dieser Funktion angeben. Wir haben also direkt eine implizite Beschreibung der Lösungen.

3.5 Integrierender Faktor finden

Haben wir nun eine Differentialgleichung, welche nicht exakt ist, so können wir diese möglicherweise mit einem geeignetem integrierenden Faktor exakt machen. Dies bedeutet, wir suchen ein passende Funktion $\lambda(x, y)$, die überall ungleich 0 ist und multiplizieren sie an die Differentialgleichung

$$\lambda(x, y)p(x, y)dx + \lambda(x, y)q(x, y)dy = 0 \ .$$

Somit haben wir die Lösungskurven der Differentialgleichung nicht verändert und können nun diese neue Gleichung betrachten. Wir suchen demnach ein $\lambda(x, y)$, das folgendes erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\lambda(x, y)p(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\lambda(x, y)q(x, y)]$$

Die neue Differentialgleichung wäre dann exakt und wir können eine Stammfunktion konstruieren. Um solch einen integrierenden Faktor zu finden, bieten es sich meistens nur an passende Ansätze auszuprobieren. Am besten ist es

$\lambda(x)$ oder $\lambda(y)$ anzusetzen. Dies bedeutet, dass die Funktion nur von einer Variablen abhängen soll und das vereinfacht die Gleichungen durchaus.

3.6 Das Kochrezept

Mit dem Wissen aus den vorherigen Abschnitten, können wir nun ein Kochrezept aufschreiben:

(1) Gegebene Differentialgleichung mit Differentialformen umschreiben.

(2) Differentialgleichung auf Exaktheit überprüfen, d. h. berechnen von

$$p_y - q_x \stackrel{?}{=} 0 \ .$$

(3) Wenn die Differentialgleichung nicht exakt ist, dann mit Hilfe des Ansatzes $\lambda(x)$ oder $\lambda(y)$ einen integrierenden Faktor suchen.

(4) Stammfunktion F durch Integration bestimmen.

4 Beispiel eines integrierenden Faktors bei nicht-linearer Differentialgleichung

Löse die Differentialform mit Hilfe eines integrierenden Faktors

$$(x^5 - x^3y^2 + xy^4 - 2x^3 + xy^2)\,dx + (yx^2 - 2y^3)\,dy = 0 \ .$$

Gib dazu eine implizite Darstellung der Lösung an.

Lösungsvorschlag

Zu Beginn definieren wir die Funktionen durch $p(x,y) = x^5 - x^3y^2 + xy^4 - 2x^3 + xy^2$ und $q(x,y) = yx^2 - 2y^3$ und schauen, ob die Differentialgleichung exakt ist. Dazu berechnen wir:

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = -2x^3y + 4xy^3 \ .$$

Da bei dieser Rechnung nicht die Null am Ende herauskommt, ist die Differentialgleichung nicht exakt. Wir müssen nun also einen entsprechenden integrierenden Faktor finden.

Gesucht ist nun ein λ mit:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\lambda(x,y)p(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\lambda(x,y)q(x,y)\Big) \ .$$

1. Versuch mit Ansatz: („ $\lambda(x,y) = \lambda(x)$ “)

Wir setzen als erstes an, dass die Funktion λ nur von x abhängen soll und lösen dann die obige Gleichung mit der Produktregel auf. Wir erhalten dann

$$\lambda'(x) = \left[\frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\Big)\right]\lambda(x) \ .$$

Diese Formel gilt also immer ganz allgemein für den genannten Ansatz. Falls nun der Ausdruck in der eckigen Klammer unabhängig von y ist, also nur von der Variablen x abhängt, dann haben wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für λ erhalten. Oder kurz gesagt: Unser Ansatz war dann erfolgreich.

Berechnen wir also die eckige Klammer:

$$\left[\frac{1}{Q}\Big(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\Big)\right] = -2x\Big(\frac{-2xy^3 + x^3y}{x^3y - 2xy^3}\Big) = -2x \ .$$

Das ist also wunderbar. Wir müssen also nur noch die Gleichung

$$\lambda'(x) = -2x\lambda(x)$$

lösen. Dies ist aber eine einfache lineare Differentialgleichung. Die zum Beispiel durch die Funktion

$$\lambda(x) = e^{-x^2}$$

gelöst wird. An dieser Stelle muss man nicht die allgemeine Lösung angeben, denn man sucht ja nur *einen* einzige integrierenden Faktor. Dieser muss nur ungleich 0 sein.

Stammfunktion finden

Nach der Konstruktion ist nun

$$\underbrace{\lambda(x)p(x,y)}_{\widetilde{p}}\,dx + \underbrace{\lambda(x)q(x,y)}_{\widetilde{q}}\,dy = 0$$

eine exakte Differentialgleichung. Nun suchen wir also nur noch ein passende Funktion F, welche

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \widetilde{q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \widetilde{p}$$

erfüllt. Dies sind zwei Differentialgleichungen, die man schrittweise lösen muss. Wir beginnen mit der erstgenannten Gleichung, d. h. wir lösen:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{-x^2} y(x^2 - 2y^2) \ .$$

Wir integrieren demnach einfach nach y und erhalten

$$F(x,y) = \frac{1}{2} e^{-x^2}(y^2x^2 - y^4) + C(x) \ .$$

Ganz wichtig an dieser Stelle ist, dass wir eine Integrationskonstante hinschreiben, welche aber nur konstant bezüglich y sein muss, denn es muss ja erstmal nur die partielle Differentialgleichung nach y erfüllt sein. Wir haben also noch eine zusätzliche Funktion $C(x)$ eingeführt.

Nun setzen wir dieses F in die zweite Gleichung ein, d. h. wir möchten, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \widetilde{p}$$

erfüllt ist. Dazu berechnen wir die Ableitung von F und schreiben $\widetilde{p}$ aus:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -xe^{-x^2}(y^2x^2 - y^4) + e^{-x^2}(xy^2) + C'(x)\\ \widetilde{p}(x,y) &= e^{-x^2}(x^5 - x^3y^2 + y^4x - 2x^3 + y^2x)\,.\end{aligned}$$

Nun vergleichen wir beide Ausdrücke und formen nach der Ableitung von C um und erhalten somit:

$$C'(x) = e^{-x^2}(x^5 - 2x^3) \ .$$

Dies ist wiederum eine wunderbare gewöhnliche Differentialgleichung, die wir leicht lösen können. Auch hier benötigen wir nur eine einzige Lösung, sodass wir die Integrationskonstante wegfallen lassen. Wir wählen also:

$$C(x) = -\frac{1}{2}x^4 e^{-x^2} \ .$$

Zusammenfassend erhalten wir eine Stammfunktion für die neue exakte Differentialgleichung durch die Funktion:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}e^{-x^2}(y^2x^2 - y^4 - x^4) \ .$$

Nun wissen wir aber aus der Theorie der Differentialgleichungen, dass eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung, bezeichnet mit $y(x)$, in einer Niveaulinie dieser Stammfunktion liegen muss, d. h.

$$\frac{1}{2}e^{-x^2}(y(x)^2x^2 - y(x)^4 - x^4) = c\,, \qquad \text{für ein } c \in \mathbb{R} \ ,$$

ist eine implizite Beschreibung der Lösungen der Differentialgleichung.