
Aufgabensammlung zur Funktionentheorie

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgaben	3
1.1	Aufgabe über komplexen Sinus und Kosinus	3
1.2	Aufgabe über Ellipsen-Kurvenintegral	3
1.3	Aufgabe über reelle Integrale	4
1.4	Aufgabe über ganze Funktionen	4
1.5	Aufgabe über Integrale über die Gaußfunktion	5
1.6	Aufgabe über normale Konvergenz	5
1.7	Aufgabe über den Konvergenzradius von Potenzreihen	6
1.8	Aufgabe über die geometrische Reihe in Potenzreihen	7
1.9	Aufgabe über den Identitätssatz	7
2	Lösungen	8
2.1	Lösung über komplexen Sinus und Kosinus	8
2.2	Lösung über Ellipsen-Kurvenintegral	11
2.3	Lösung über reelle Integrale	13
2.4	Lösung über ganze Funktionen	18
2.5	Lösung über Integrale über die Gaußfunktion	21
2.6	Lösung über normale Konvergenz	24
2.7	Lösung über den Konvergenzradius von Potenzreihen	31
2.8	Lösung über die geometrische Reihe in Potenzreihen	35
2.9	Lösung über den Identitätssatz	38

Um die Mathematik zu lernen, muss man sie selbst angewendet haben. Aus diesem Grund gibt es unzählige Übungsaufgaben in allen Themenbereichen. Nun hat man aber nicht immer die richtige Idee oder Zeit eine Übungsaufgabe komplett zu durchdringen. Manchmal hat man solange darüber nachgedacht, dass man verzweifelt.

Nun gibt es mit Sicherheit irgendwo Lösungsskizzen oder -ideen zu finden, die oft als „Musterlösungen“ angepriesen werden. Das ist aber der falsche Weg, denn ein Ergebnis vorgelegt zu bekommen oder schnell die verschiedenen Schritte herunterzurattern, missachtet die eigentliche Denkarbeit innerhalb der Übungsaufgabe.

Ich möchte genau diese Lücke mit dieser Aufgabensammlung schließen, indem ich die Lösung mit allen Gedankenschritten und Informationen fülle, die man hat und braucht, wenn man die Aufgabe wirklich lösen möchte. Ich zeichne die Bilder und Skizzen, welche man für seine Gedanken benötigt hat. Die Intention ist, dass der Leser alle Schritte nachvollziehen kann und jederzeit den Beweis und die Lösung selbstständig weiterführen kann, sobald „der Groschen gefallen ist“.

Im Idealfall solltest du die Lösung zu einer Aufgabe erst lesen, wenn du dir schon genügend Gedanken über die Aufgabe gemacht hast, sodass dir die Lösung auf die Sprünge helfen oder Lücken schließen kann.

Es kommt nun aber oft vor, dass man mit der Aufgabe nichts anfangen kann, aber man eine Klausur oder Prüfung vor sich hat. In diesem Fall kann man die umfangreiche und ausführliche Lösung als eine Lernhilfe verwenden, die du lesen kannst, um das Thema besser zu verstehen und die Rechenideen zu verinnerlichen.

Selbstverständlich kannst du die Lösung auch als Überprüfung für deine eigene Lösung nutzen. Manchmal ist man sich nicht sicher, ob alle Werkzeuge richtig angewendet wurden, sodass man hier nochmals eine anschaulich erklärte und detailliert dargestellte Lösung einsehen kann.

1 Aufgaben

1.1 Aufgabe über komplexen Sinus und Kosinus

Es sei die komplexe Exponentialfunktion durch $\exp(x+iy) := e^x(\cos y + i \sin y)$ auf der gesamten komplexen Ebene definiert. Dann definiert man für $z \in \mathbb{C}$ den *komplexen Sinus* und den *komplexen Kosinus* folgendermaßen:

$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i},$$

$$\cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Wo liegen die Nullstellen der Funktionen und was ist jeweils das Bild der Funktion?

Hier geht es zur Lösung.

1.2 Aufgabe über Ellipsen-Kurvenintegral

Es soll das Kurvenintegral über der Funktion $f(z) = 1/z$ entlang einer Ellipse berechnet werden. Es seien nun $a, b > 0$ und die Wege $\rho, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben:

$$\rho(t) = a \cos(2\pi t) + ia \sin(2\pi t),$$

$$\gamma(t) = a \cos(2\pi t) + ib \sin(2\pi t).$$

Zeige nun zuerst, dass

$$\int_{\rho} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

gilt, und berechne damit das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt.$$

Hinweis: Hier ist nur das Wissen von Kurvenintegralen über holomorphe Funktionen auf Sterngebieten vorausgesetzt.

Hier geht es zur Lösung.

1.3 Aufgabe über reelle Integrale

Berechne nur mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete und der Cauchy'schen Integralformel das folgende reelle Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx .$$

Hier geht es zur Lösung.

1.4 Aufgabe über ganze Funktionen

Es sei eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, d.h. f ist auf ganz \mathbb{C} holomorph. Zeige die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn der Realteil $\operatorname{Re} f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion ist, dann kann f nur konstant sein.
- (b) Ist f keine konstante Funktion, so liegt das Bild von f dicht in \mathbb{C} , d. h.

$$\overline{\{f(z) \in \mathbb{C} \mid z \in \mathbb{C}\}} = \mathbb{C} .$$

Hier geht es zur Lösung.

1.5 Aufgabe über Integrale über die Gaußfunktion

Es ist die Gauß'sche Glockenkurve auf ganz \mathbb{C} gegeben:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} .$$

Wir setzen voraus, dass das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

bekannt ist.

- (a) Zeige nun mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes, dass das folgende Integral für alle reellen Zahlen $b \in \mathbb{R}$ den gleichen Wert besitzt, nämlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ib)^2} dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-\frac{1}{2}(x+ib)^2} dx = \sqrt{2\pi} .$$

- (b) Berechne mit Teil (a) die folgenden reellen Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(bx) dx ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin(bx) dx .$$

Hinweis: Betrachte einen geeigneten Rechtecksweg in der komplexen Ebene.

Hier geht es zur Lösung.

1.6 Aufgabe über normale Konvergenz

- (a) Geben Sie die Definition der *lokal-gleichmäßigen* Konvergenz einer Funktionenfolge an und geben Sie die Definition der *normalen* Konvergenz einer Reihe von Funktionen an. Welches ist der stärkere Begriff?

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe normal in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - (2n+1)z + n(n+1)} .$$

Bestimmen Sie weiterhin die Grenzfunktion.

Hier geht es zur Lösung.

1.7 Aufgabe über den Konvergenzradius von Potenzreihen

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-n} z^n$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} z^{3n}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} z^n$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(n) z^n$$

Hier geht es zur Lösung.

1.8 Aufgabe über die geometrische Reihe in Potenzreihen

Bestimmen Sie mit dem Wissen über die geometrische Reihe den Konvergenzradius und die Grenzfunktion der folgenden Reihen:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n ,$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n .$$

Bestimmen Sie nun ebenfalls mit Hilfe von bekannten Potenzreihen die Taylorreihe im Ursprung und ihren Konvergenzradius von den folgenden Funktionen:

(c)

$$f(z) = e^{z^2+i} ,$$

(d)

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 3} .$$

Hier geht es zur Lösung.

1.9 Aufgabe über den Identitätssatz

Gibt es eine holomorphe Funktion $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem offenen Einheitskreis $B_1(0) \subset \mathbb{C}$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt?

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = f\left(\frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{k}, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Hier geht es zur Lösung.

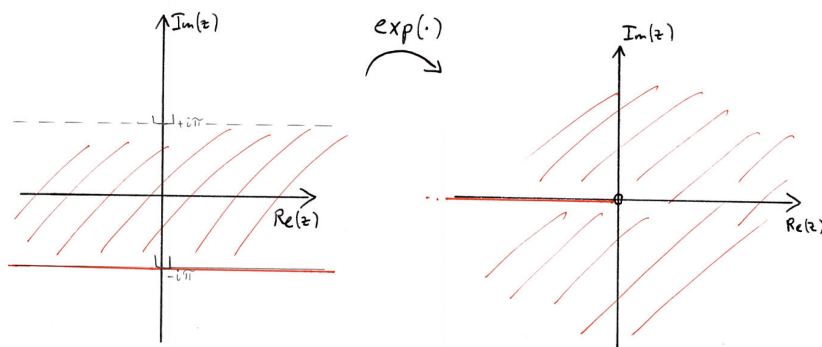
2 Lösungen

2.1 Lösung über komplexen Sinus und Kosinus

Wir wiederholen zuerst die Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion. Anders als die bekannte reelle Funktion ist Exponentialfunktion auf der komplexen Ebene nicht mehr injektiv, d. h. es kann durchaus vorkommen, dass

$$\exp(z_1) = \exp(z_2), \quad \text{für } z_1 \neq z_2$$

gilt. Das ist natürlich eine bekannte Eigenschaft, da z. B. $\exp(2\pi i) = \exp(0) = 1$ gilt. In der Tat besitzt die Funktion die Periode $2\pi i$. Der Streifen aus der komplexen Ebene wird auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet.



Die Null kann natürlich nicht angenommen werden, da auch die reelle Funktion $f(x) = e^x$ für alle x strikt positiv ist. Alle anderen komplexe Werte werden angenommen und mit diesem Wissen berechnen wir die Bilder von Sinus und Kosinus

Kosinus ist surjektiv: Wir wählen ein $w \in \mathbb{C}$ beliebig und wollen nun zeigen, dass es ein passendes $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = w$ gibt. Dazu schreiben wir

die gewünschte Gleichung ein wenig um:

$$\begin{aligned} & \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = w \\ \Leftrightarrow & \exp(iz) + \frac{1}{\exp(iz)} = 2w \\ \Leftrightarrow & (\exp(iz))^2 + 1 = 2w \exp(iz) \end{aligned}$$

Setzen wir nun kurz $x := \exp(iz)$, so ist die obige Gleichung eine gewöhnliche quadratische Gleichung. Eine quadratische Ergänzung bringt nun

$$\begin{aligned} & (x - w)^2 = w^2 - 1 \\ \Leftrightarrow & y^2 = w^2 - 1, \end{aligned}$$

wobei wir nochmals eine neue Variable $y := x - w$ eingeführt haben. Betrachten wir diese Gleichung mit der unabhängigen Variablen y , so ist bekannt, dass die quadratische Gleichung zwei Lösungen hat, die wir q_1, q_2 nennen, wobei natürlich $q_2 = -q_1$ gilt. Wir fassen also kurz zusammen, was wir herausgefunden haben:

Es gibt genau dann ein $z \in \mathbb{C}$ derart, dass $\cos(z) = w$ gilt, wenn es zwei Zahlen $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$ gibt, die $q_j^2 = w^2 - 1$ für $j = 1, 2$ erfüllen und entweder

$$q_1 = \exp(iz) - w \quad \text{oder} \quad q_2 = \exp(iz) - w$$

gilt. Nun können wir aber folgende Rechnung aufstellen:

$$(w + q_1)(w + q_2) = (w + q_1)(w - q_1) = w^2 - q_1^2 = 1 \neq 0 .$$

Beide Faktoren müssen also ungleich 0 sein, sodass in jedem Falle $\exp(iz) \neq 0$ gilt. Verwenden wir an dieser Stelle unser Wissen über das Bild der Exponentialfunktion, so erkennen wir, dass es in der Tat ein $z \in \mathbb{C}$ gibt mit $\exp(iz) = w + q_1$. Mit dem oben Gesagtem, gilt also dann $\cos(z) = w$ und somit $\text{Bild}(\cos) = \mathbb{C}$.

Sinus ist surjektiv: Dass der Sinus surjektiv, kann analog zum Kosinus bewiesen werden. Wir wählen ein $w \in \mathbb{C}$ beliebig und stellen die Frage, ob es ein z mit

$$\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = w$$

gibt. Die Gleichung kann wieder umgeformt werden und zwar zu

$$(\exp(iz) - iw)^2 = 1 - w^2 .$$

welche wieder zwei Lösungen hat, die wiederum zeigen, dass $\exp(iz) \neq 0$. Somit ist auch $\text{Bild}(\sin) = \mathbb{C}$.

Nullstellen des Kosinus: Wir setzen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und berechnen dann

$$\cos(z) = 0 \iff \exp(iz) = -\exp(-iz) \iff \exp(2ix) = -e^{-2y} .$$

Insbesondere gilt also $\exp(2ix) \in \mathbb{R}^-$ und $|e^{-2y}| = 1$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\exp(2ix) = -1 \quad \text{und} \quad y = 0 .$$

Aufgrund der Periodizität der Exponentialfunktion finden wir somit die bekannten reellen Nullstellen:

$$\text{Nullstellen} = \{(k + 1/2)\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Nullstellen des Sinus: Wir setzen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und berechnen dann

$$\sin(z) = 0 \iff \exp(iz) = \exp(-iz) \iff \exp(2ix) = e^{-2y} .$$

Insbesondere gilt also $\exp(2ix) \in \mathbb{R}^+$ und $|e^{-2y}| = 1$. Dies ist gleichbedeutend mit

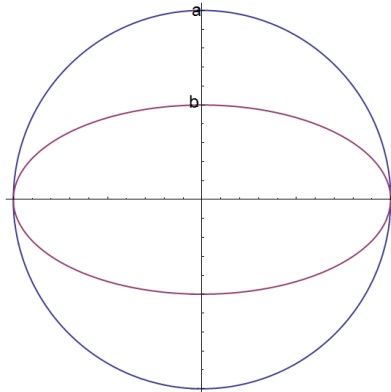
$$\exp(2ix) = 1 \quad \text{und} \quad y = 0 .$$

Aufgrund der Periodizität der Exponentialfunktion finden wir somit die bekannten reellen Nullstellen:

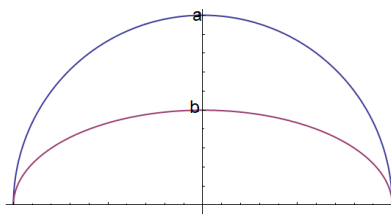
$$\text{Nullstellen} = \{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

2.2 Lösung über Ellipsen-Kurvenintegral

Die Kurve ρ parametrisiert einen Kreis mit Radius a , während γ eine Ellipse mit den Halbachsen a und b darstellt.



Beide werden gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen und haben auf der reellen Achse zwei gemeinsame Punkte. Offensichtlich ist aber das ganze Gebiet, d. h. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, kein Sterngebiet, sodass bekanntermaßen $1/z$ dort keine Stammfunktion besitzt. Kurvenintegrale lassen sich mit Hilfe von Stammfunktionen natürlich viel einfacher ausrechnen, da man nur den Anfangs- und Endpunkt kennen und benutzen muss. Aus diesem Grund teilen wir die Wege einfach auf:



Nehmen wir nun die geschlitzte Ebene, in welcher die untere imaginäre Achse fehlt, bzw. in Formeln

$$D_{\frac{3}{2}\pi} := \left\{ r e^{i(\varphi + \frac{3}{2}\pi)} \in \mathbb{C} \mid r > 0, \varphi \in (0, 2\pi) \right\},$$

so ist diese selbstverständlich ein Sterngebiet, auf dem $1/z$ eine Stammfunktion besitzt. Dies bedeutet, das Integral hängt nur von dem Anfangs- und

Endpunkt ab, d. h.

$$\int_{\rho|_{[0, 1/2]}} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma|_{[0, 1/2]}} \frac{1}{z} dz .$$

Mit der gleichen Argumentation kann man den unteren Teil des Weges betrachten und erhält:

$$\int_{\rho|_{[1/2, 1]}} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma|_{[1/2, 1]}} \frac{1}{z} dz .$$

Nun müssen die Wege nur noch zusammengesetzt werden und man erhält die gewünschte Gleichung:

$$2\pi i = \int_{\rho} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz .$$

Dass das Kreisintegral über f gleich $2\pi i$ ist, kann explizit und leicht nachgerechnet werden und als Ergebnis erhalten wir, dass auch der Weg der Ellipse den gleichen Wert hat. Schreiben wir dies doch einfach aus:

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi \int_0^1 \frac{-a \sin(2\pi t) + ib \cos(2\pi t)}{a \cos(2\pi t) + ib \sin(2\pi t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\tau) + ib \cos(\tau)}{a \cos(\tau) + ib \sin(\tau)} d\tau . \end{aligned}$$

Nun teilen wir das Integral in Imaginär- und Realteil auf:

$$2\pi i = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin(\tau) \cos(\tau)}{a^2 \cos^2(\tau) + b^2 \sin^2(\tau)} d\tau + iab \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2(\tau) + b^2 \sin^2(\tau)} d\tau .$$

Nach dieser Gleichung muss der Realteil verschwinden und der Imaginärteil gleich 2π sein, d. h.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt = \frac{2\pi}{ab}$$

und die Aufgabe ist gelöst.

Es sei noch bemerkt, dass man das letzte Integral auch nur im Reellen lösen kann, indem man eine passende Substitution findet.

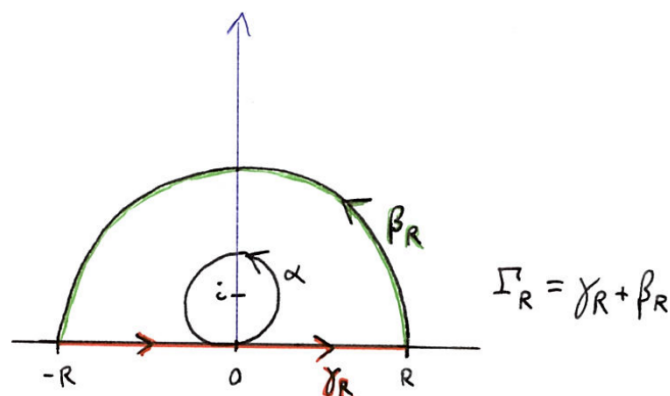
2.3 Lösung über reelle Integrale

Diese Aufgabe zeigt eine erste Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes für rein reelle Integrale, wobei man kein weiteres Wissen voraussetzen muss. Es stellt sich heraus, dass man für eine geeignete Wahl einer Kurve in der komplexen Ebene, reelle Integrale durch leichte Umformungen lösen kann. Dabei verwenden wir keine weiteren Ergebnisse der Funktionentheorie, sondern nur den ganz grundlegenden Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete und die Integralformel.

1. Schritt: Kurven wählen: Wenn man solch eine Aufgabe löst, so ist der erste Schritt, die zu integrierende Funktion sinnvoll auf die komplexe Ebene fortzusetzen, d. h. in diesem Aufgabenteil betrachten wir

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

als holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Das heißt, es liegt jeweils ein Pol in der oberen und in der unteren Halbebene. Die Idee muss nun also sein, ein komplexes Kurvenintegral zu wählen, welches mindestens einen der Pole einschließt, am besten aber nur eines, um den Rechenaufwand gering zu halten. Ein gute Wahl ist folgender Weg in der oberen Halbebene:



Die Wege sind in der Zeichnung eindeutig definiert. Zur Vollständigkeit

schreiben wir aber noch die expliziten Formeln auf. Dabei ist $R > 1$ fest gewählt.

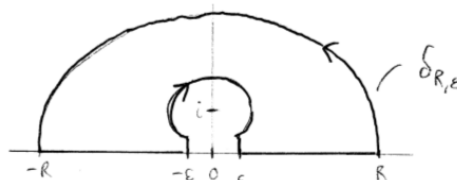
$$\begin{aligned}\alpha &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto i + e^{it} \\ \gamma_R &: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto t \\ \beta_R &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto Re^{it} \\ \Gamma_R &:= \gamma_R + \beta_R, & & \text{(zuerst } \gamma_R \text{ und dann } \beta_R \text{ durchlaufen)}\end{aligned}$$

Hier sind einige Dinge zusammen gekommen, die wir kurz erklären sollten. Als erstes müssen wir alles in einer beschränkten Menge betrachten. Jegliche Unendlichkeiten kann man erst am Schluss betrachten. In unserem Fall ist der Weg über die komplette reelle Achse unser Ziel. Das heißt aber nichts anderes, dass wir das Integral über γ_R im Grenzwert für $R \rightarrow \infty$ betrachten wollen. Diesen Grenzwert führen wir erst ganz am Ende aus. Des Weiteren möchten wir für die Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes einen geschlossenen Weg erzeugen. Dazu dient der Halbkreis β_R , wobei die Idee ist, dass dieser für größer werdendes R immer unwichtiger wird. Der Sinn des zusätzlichen Kreises α wird sich nun mit der nächsten Bemerkung klären.

2. Schritt: Sterngebiet wählen: Das Problem an dieser Stelle ist aber, dass wir den Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete verwenden wollen, sodass wir ein Sterngebiet benötigen, auf welchem die Funktion f holomorph ist. Deswegen müssen wir den Weg folgendermaßen abändern, sodass er auf dem offenen Sterngebiet

$$D := \mathbb{C} \setminus i(\infty, 1]$$

definiert ist.



Wir nehmen also die imaginäre Achse von unten bis zur Zahl i heraus und

erzeugen somit ein Sterngebiet D . Den Weg müssen wir dann aber am Ursprung aufschneiden. Dies tun wir mit einer kleinen gewählten Zahl $\varepsilon > 0$, wobei wir ebenso $\varepsilon < 1/2$ ansetzen, damit die Kurve immer wie auf dem Bild aussieht. Den Weg mit der Durchlaufsrichtung bezeichnen wir mit $\delta_{R,\varepsilon}$, da er offenbar von den beiden Zahlen ε und R abhängt. Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0^+$ entsteht wieder unser erst gewählter Weg, und genau diesen Grenzwert werden wir später durchführen. An dieser Stelle ersparen wir uns aber das explizite Angeben einer Formel für $\delta_{R,\varepsilon}$. Dies wäre nämlich etwas kompliziert und würde keine neue Erkenntnis bringen. Das Bild sagt hier in der Tat genau das, was geschieht.

3. Schritt: Kurvenintegrale gleichsetzen: Nun beginnen wir mit dem eigentlichen Rechnen: Als erstes stellen wir fest, dass nun der Cauchy'schen Integralsatz auf dem Sterngebiet D für den Weg $\delta_{R,\varepsilon}$ und die holomorphe Funktion $f|_D$ anwendbar ist, d. h.

$$\int_{\delta_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0, R > 1 .$$

Das ist jedoch wunderbar, denn das bedeutet, dass auch der Grenzwert verschwindet, oder nochmals ausformuliert in einer Formel:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0 \quad \text{für alle } R > 1 . \quad (1)$$

In diesem Grenzwert geht das zweite Bild in das erste über und wir erhalten demnach die passende Aussagen über die zuerst gewählten Kurven. Aber bevor wir diese formulieren, möchte ich noch kurz erklären, dass dieser Grenzwert nicht nur anschaulich das zweite Bild in das erste überführt, sondern, dass dies auch wirklich für die Integrale entlang der Kurve gilt. Nehmen wir an, wir integrieren irgendeine Funktion g über diese Kurven, dann erhalten wir:

$$\int_{\Gamma_R} g(z) dz - \int_{\alpha} g(z) dz - \int_{\delta_{R,\varepsilon}} g(z) dz = \int_{\Gamma_{R-\alpha-\delta_{R,\varepsilon}}} g(z) dz$$

Die letzte Kurve ist aber offensichtlich nur der Unterschied zwischen dem ersten und dem zweiten Bild. Mit korrektem Durchlaufsinn demnach:

$$\Gamma_R - \alpha - \delta_{R,\varepsilon} = \text{Diagram}$$

Man kann nun ganz grob abschätzen, dass die Gesamtlänge der Kurve immer kleiner als 8ε ist. Nehmen wir nun an, dass die zu integrierende Funktion wenigstens stetig innerhalb dieser Restkurve, die wir nun mit ρ_ε abkürzen, ist, so können wir allgemein folgende Ungleichung aufstellen:

$$\left| \int_{\Gamma_R} g(z) dz - \int_\alpha g(z) dz - \int_{\delta_{R,\varepsilon}} g(z) dz \right| \leq 8\varepsilon \max_t |g(\rho_\varepsilon(t))| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

Man schätzt das Kurvenintegral einfach durch den größten Wert auf der Kurve multipliziert mit der Gesamtlänge der Kurve ab. Da die Länge natürlich immer kleiner wird, verschwindet im Grenzwert auch der Beitrag von dieser Restkurve.

Wir notieren die Eigenschaft, dass das zweite Bild in das erste übergeht durch die folgende kurze Formel:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\Gamma_R} f(z) dz - \int_\alpha f(z) dz - \int_{\delta_{R,\varepsilon}} f(z) dz \right) = 0 \quad (2)$$

Nun haben wir vorhin aber schon gezeigt, dass die Kurve $\delta_{R,\varepsilon}$ ein Kurvenintegral von 0 liefert. Bringen wir diese Formel (1) mit der Formel (2) zusammen, so erhalten wir

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_\alpha f(z) dz \quad (3)$$

und zwar ganz ohne unser ε , da wir den Grenzwert nun schon durchgeführt haben. Wir haben also schon viel gewonnen.

4. Schritt: Halbkreis abschätzen: Um nun letztendlich das gewünschte Integral über γ_R zu kommen, müssen wir nun noch zeigen, dass das Halbkreis-

sintegral β_R immer kleiner wird, wenn wir R größer wählen. Dazu brauchen wir, die auch schon oben benutzte Ungleichung, welche die Länge der Kurve $L(\beta_R)$ benutzt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\beta_R} f(z) dz \right| &\leq L(\beta_R) \max_t |f(\beta_R(t))| = \pi R \left| \frac{1}{(1-R^2)^2} \right| \\ &= \pi R \frac{1}{|1-2R-R^4|} \leq \pi \frac{R}{R^4+1} \quad \text{für } R > 1 \\ &= \pi \frac{1}{R^3 + \frac{1}{R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Das heißt also, dass dieser Halbkreisring, der die Kurve γ_R letztendlich zu einer geschlossenen Kurve macht, immer unwichtiger wird. Dies halten wir nochmals in einer Formel fest:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_R} f(z) dz = 0. \quad (4)$$

5. Schritt: Integral ausrechnen: Nachdem wir nun diese ganzen Bilder gezeichnet haben und Ungleichungen aufgeschrieben haben, um alle Vermutungen zu bestätigen und zu rechtfertigen, können wir uns letztendlich an der Integral herantrauen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \\ &\stackrel{(4)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\alpha} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \end{aligned}$$

Nun haben wir das reelle Integral auf ein einfaches Kreisintegral in der komplexen Ebene ausgedrückt und für letzteres können wir die Cauchy'sche

Integralformel verwenden:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_{\alpha} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \\ &= \int_{\partial B_1(i)} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} dz \\ &= \int_{\partial B_1(i)} \frac{1}{(z-i)^2} g(z) dz \quad \text{mit } g(z) := \frac{1}{(z+i)^2} \\ &= 2\pi i \cdot g'(i) \quad \text{nach Cauchy'sche Integralformel} \\ &= 2\pi i \left(-2 \frac{1}{(i+i)^3} \right) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

2.4 Lösung über ganze Funktionen

Diese Aufgabe zeigt, dass ganze Funktionen, d. h. holomorphe Funktionen, die auf der kompletten komplexen Ebene definiert sind, sehr einschränkende Eigenschaften vorweisen. Sie sind entweder konstant und treffen somit nur einen einzigen Punkt in der komplexen Ebene oder sie sind nicht konstant, aber müssen dann mit ihrer Bildmenge die komplette Ebene dicht ausfüllen. In dieser Aufgabe setzen wir den *Satz von Liouville* voraus.

Zu (a): In diesem Aufgabenteil zeigen wir, dass der Satz von Liouville auch noch verstärkt werden kann. Man muss nicht wissen, dass die ganze Funktion f beschränkt ist, es reicht schon aus, zu wissen, dass nur der Realteil beschränkt ist, um auf die konstante Funktion zu schließen. Um jedoch den bekannten Satz von Liouville in dieser Aufgabe verwenden zu können, müssen wir die folgende Hilfsfunktion definieren:

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = e^{f(z)} .$$

Die erste Feststellung hier ist, dass dies eine holomorphe Funktion nach der Kettenregel definiert. Weiterhin liegt wieder eine ganze Funktion vor.

Der Trick an dieser Wahl ist jedoch, dass wir den Realteil direkt ins Geschehen

bringen können. Ohne Umwege gilt nämlich

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re}f(z)}$$

und nach der Voraussetzung ist g also eine beschränkte ganze Funktion. An dieser Stelle können wir den Satz von Liouville anwenden und direkt schlussfolgern, dass g eine konstante Funktion ist. Oder anderes gesagt, es gibt ein festes $c \in \mathbb{C}$ mit

$$e^{f(z)} = c \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} .$$

Dies bedeutet aber, dass $f(z)$ als *ein* Logarithmus von der Zahl c gegeben ist. Wir wissen, dass der Logarithmus im Komplexen nicht eindeutig ist, aber sich nur um ganzzahliges Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden kann. Um besser zu argumentieren, nehmen wir nun ohne Einschränkung an, dass c nicht auf der negativen reellen Achse liegt. Dann können wir \log für den Hauptzweig des Logarithmus schreiben und folgende Umkehrung der oberen Gleichung vornehmen:

$$f(z) = \log(c) + 2\pi i k(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} .$$

Hier muss $k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ eine Funktion mit Werten in den ganzen Zahlen sein. Aber nun wissen wir ja noch viel mehr über die Funktion f : Sie ist differenzierbar und somit natürlich auch stetig, d. h. solche ganzzahligen Sprünge durch die Funktion k sind überhaupt nicht erlaubt. Dementsprechend kann auch k nur eine konstante Funktion sein, sodass nach der obigen Formel auch f konstant ist. Und genau dies war ja zu zeigen.

Zu (b): In diesem Aufgabenteil werden wir eine wichtige Eigenschaft von ganzen Funktionen beweisen, nämlich, dass alle nicht-konstanten ganzen Funktion „fast-surjektiv“ sind. Damit meine ich dies in dem Sinne, dass das Bild zwar nicht die komplette Menge \mathbb{C} sein muss, aber zumindest dicht liegt, was nichts anderes heißt, dass jede komplexe Zahl durch eine Folge in der Bildmenge beliebig angenähert werden kann. Das schreiben wir nochmal explizit auf:

Zu zeigen ist: Wenn f eine nicht-konstante ganze Funktion ist, dann gilt,

dass das Bild von f dicht in \mathbb{C} ist, d. h. für alle $w \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ mit

$$f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w .$$

Hier sollte man erkennen, dass eine Implikation $(A \Rightarrow B)$ zu zeigen ist, die nach der Aussagenlogik vollkommen äquivalent zur der Kontraposition $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ ist. Und genau diese werden wir nun auch zeigen, denn dort lässt sich viel besser argumentieren. Wir wollen also aus der Annahme, dass das Bild *nicht* dicht liegt, folgern, dass f konstant ist.

Wir nehmen nun also an, dass Bild f nicht dicht in \mathbb{C} liegt. Dies bedeutet aber, dass es wenigstens eine komplexe Zahl gibt, die nicht durch Bildpunkte angenähert werden kann. Wir finden um diesen Punkt also einen kleinen Kreis, in welchem keine Bildpunkte liegen können. In Formeln ausgedrückt: Es existiert ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$ mit

$$|f(z) - w_0| \geq r \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} .$$

Insbesondere wird die linke Seite niemals Null, sodass wir die folgende Funktion definieren können:

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} .$$

Erst mal stellen wir fest, dass die Funktion als Kombination der Funktion f mit konstanten Funktionen in jedem Falle auch holomorph ist, ja sogar auf ganz \mathbb{C} definiert ist, was sie zu einer wunderbaren *ganzen Funktion* macht. Um nun noch den Satz von Liouville anwenden zu können, müssen wir noch die Beschränktheit zeigen. Allerdings haben wir die passende Gleichung ja schon oben stehen:

$$|g(z)| = |f(z) - w_0|^{-1} \leq r \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} .$$

Der Satz von Liouville liefert nun wie üblich, dass g konstant sein muss und nach der Funktionsdefinition muss dann auch f konstant sein. Somit haben wir alles gezeigt.

2.5 Lösung über Integrale über die Gaußfunktion

Diese Aufgabe zeigt eine Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes und zwar kann die Kombination von Kosinus bzw. Sinus mit der Gauß'schen Glockenkurve leicht integriert werden. Dazu muss nur der richtige Weg in der komplexen Ebene gewählt werden.

Zu (a): In diesem Aufgabenteil betrachten wir die Gauß'sche Glockenkurve auf der ganzen Menge \mathbb{C} :

$$f(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} .$$

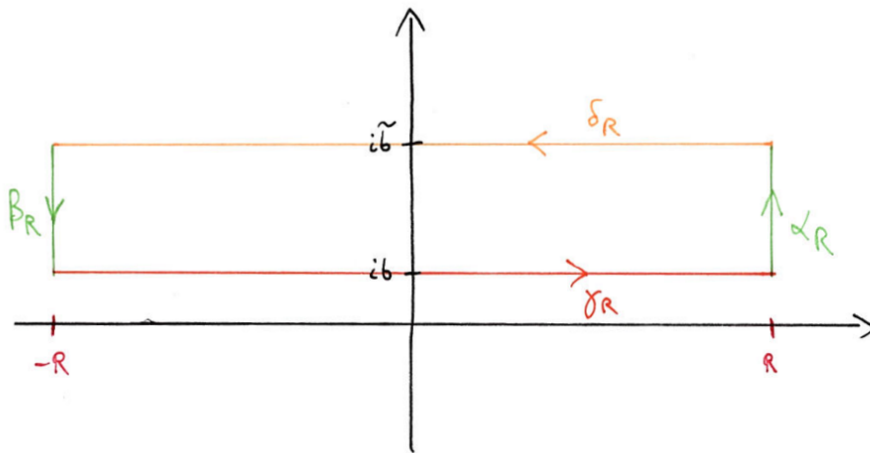
Sie ist offensichtlich auf der ganzen Ebene holomorph, sodass wir den Cauchy'schen Integralsatz anwenden dürfen. Nun wählen wir zwei beliebige unterschiedliche reelle Zahlen $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}$, wobei wir das gleich folgende Bild unter der Voraussetzung $\tilde{b} > b$ zeichnen. Dies ist natürlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich.

Für jedes vorgegebene $R > 0$ wählen wir vier gerade Wege $\alpha_R, \beta_R, \gamma_R$ und δ_R in der komplexen Ebene und zwar nach dem Bild auf der nächsten Seite. Weiterhin definieren wir dann den geschlossenen Weg

$$\Gamma_R := \alpha_R + \delta_R + \beta_R + \gamma_R .$$

Der geschlossene Weg ist natürlich wichtig, um den Cauchy'schen Integralsatz anzuwenden. Wir haben schon erwähnt, dass dieser für die ganze Funktion f in jedem Falle gilt, d. h.

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0 . \tag{5}$$



Nun wollen wir nach der Aufgabenstellung ja zeigen, dass das Kurvenintegral über γ_R gleich dem Integral über $-\delta_R$ ist, zumindest im Grenzwert $R \rightarrow \infty$. Das heißt aber, dass wir zeigen müssen, dass die Verbindungswege immer kleiner werden, so größer wir R wählen. Das ist in der Funktionentheorie also immer das gleiche Argument. Wir schätzen den Betrag der Kurve durch die Länge L der Kurve ab:

$$\left| \int_{\alpha_R} f(z) dz \right| \leq L(\alpha_R) \cdot \max_t |f(\alpha(t))|$$

Nun ist die Länge der Kurve α aber genau der Unterschied zwischen b und \tilde{b} , sodass wir die obige Ungleichung umschreiben können:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_R} f(z) dz \right| &\leq |\tilde{b} - b| \cdot \max_{a \in [b, \tilde{b}]} \left| e^{-\frac{1}{2}(R+ia)^2} \right| \\ &\leq |\tilde{b} - b| \cdot \max_{a \in [b, \tilde{b}]} \left| e^{-\frac{1}{2}(R^2 - a^2)} \right| \cdot \underbrace{\left| e^{-\frac{1}{2}(i2Ra)} \right|}_{=1} \end{aligned}$$

Das Maximum können wir explizit ausführen und erhalten:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_R} f(z) dz \right| &\leq |\tilde{b} - b| \cdot \max_{a \in [b, \tilde{b}]} \left| e^{-\frac{1}{2}(R^2 - a^2)} \right| \\ &\leq \underbrace{|\tilde{b} - b| e^{\frac{1}{2}\tilde{b}^2}}_{=:C} \cdot e^{-\frac{1}{2}R^2} \end{aligned}$$

Wir erhalten also, dass wir nur einen passenden R -abhängigen Faktor erhalten,

während wir alle anderen zu einer Konstanten zusammenfassen können. Die Zahlen b und \tilde{b} wurden zwar beliebig gewählt, aber sind von Anfang an festgesetzt und unabhängig von R . Wir können nun den Grenzwert $R \rightarrow \infty$ durchführen und erhalten exakt das gewünschte Ergebnis:

$$\left| \int_{\alpha_R} f(z) dz \right| \leq C \cdot e^{-\frac{1}{2}R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (6)$$

Genau dies wollten wir ja zeigen. Die Hilfsverbindungswege verschwinden im Unendlichen, denn die Argumentation ist für den Weg β_R natürlich völlig identisch.

Nun können wir also den Cauchy'schen Integralsatz von oben verwenden, d. h. Formel (5) besagt:

$$0 \stackrel{(5)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz \stackrel{(6)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\delta_R} f(z) dz$$

Im Grenzwert bleiben nur die zwei horizontalen Wege übrig. Beachten wir nun, dass der Weg δ_R in die falsche Richtung durchlaufen wird, erhalten wir beim Einsetzen der Kurven nun die folgende Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ib)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\tilde{b})^2}.$$

Genau diese Gleichheit war zu zeigen. Da b und \tilde{b} beliebig gewählt waren, können wir auch $\tilde{b} = 0$ setzen und erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ib)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2\pi} \quad \text{für alle } b \in \mathbb{R}.$$

Zu (b): Diese Aufgabenteil ist nun eine Anwendung der gerade gezeigten Aussage. Wir müssen nur die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ib)^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

ein wenig umformen. Was in jedem Fall auffallen sollte ist, dass die rechte Seite eine reelle Zahl ist, während die linke Seite im Komplexen lebt. Oder anders gesagt: Der Imaginärteil auf der linken Seite muss 0 sein und der

Realteil entspricht genau $\sqrt{2\pi}$. Formen wir den Integranden also einfach mal um:

$$e^{-\frac{1}{2}(x+ib)^2} = e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ibx-b^2)} = e^{-\frac{1}{2}(x^2-b^2)} e^{-\frac{1}{2}2ibx} = e^{-\frac{1}{2}(x^2-b^2)} e^{-ibx} .$$

Wenn wir nun im letzten Faktor die Euler'sche Formel anwenden

$$e^{-ibx} = \cos(bx) - i \sin(bx) ,$$

erhalten wir die gewünschte Aufteilung in Real- und Imaginärteil:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ib)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-b^2)} \cos(bx) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-b^2)} \sin(bx) dx$$

Wir haben schon gesagt, dass dies gleich $\sqrt{2\pi}$ sein muss, sodass der Imaginärteil verschwinden muss. Wir erhalten demnach die gewünschten Ergebnisse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(bx) dx = e^{-\frac{1}{2}b^2} \sqrt{2\pi} ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin(bx) dx = 0 .$$

2.6 Lösung über normale Konvergenz

Diese Aufgabe ist eine sehr technische aber trotzdem durchaus wichtige Aufgabe innerhalb der Funktionentheorie. Der Begriff der *normalen Konvergenz* ist zum Beispiel zu verwenden, um von der Holomorphie der einzelnen Reihenglieder auf die Holomorphie der Reihe zu schließen. Weiterhin können die Glieder in normal konvergenten Reihen beliebig umsortiert werden ohne die Grenzfunktion zu verändern, was die Reihen besonders handlich macht. In der Lösung der Aufgabe werde ich die normale Konvergenz anschaulich und genau erklären und ein Beispiel zur Überprüfung der normalen Konvergenz ganz ausführlich vorführen.

Zu (a): In diesem Teil schreiben wir zuerst die Definition auf und erklären diese dann genau.

Definition (lokal gleichmäßige Konvergenz): Es sei eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge ist. Wir sagen nun, dass diese Folge *lokal gleichmäßig gegen* $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ *konvergiert*, wenn zu jedem Punkt $x \in D$ eine relativ offene Umgebung $U \subset D$ derart existiert, dass gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall y \in U) : |f(y) - f_n(y)| < \varepsilon . \quad (7)$$

Mit vollkommener Absicht habe ich die Definition sehr formal und kompliziert präsentiert, denn das ist erst mal die kurze und knackige Formulierung wie man sie oft findet, der wir nun aber etwas Leben einhauchen können. Zuerst möchte ich erwähnen, dass man die Gleichung (7) auch als

$$\sup_{y \in U} |f(y) - f_n(y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

umschreiben kann. Dort ist auch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz versteckt, denn es ist nicht nur so, dass die Funktionenfolge für jeden festgehaltenen Punkt y konvergiert, sondern das gewählte N aus (7) gilt gleichzeitig für alle Punkte $y \in U$. Man sollte also nochmal betonen, dass diese Forderung viel stärker als die punktweise Konvergenz ist.

Nun zur normalen Konvergenz:

Definition (normale Konvergenz): Es sei eine komplexwertige Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge ist. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot) : D \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt nun *normal konvergent*, wenn für alle Punkte $a \in D$ eine relativ offene Umgebung $U \subset D$ existiert und eine Folge $(M_n) \subset \mathbb{R}_0^+$ mit $\sum_n M_n < \infty$ so gewählt werden kann, dass

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad \text{für alle } z \in U \text{ und für alle } n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

gilt.

Auch dies kann man wieder sehr gut erklären. Die Definition der normalen Konvergenz bezieht sich immer auf Reihen von Funktionen und sie besagt ungefähr, dass man die Reihe *gleichmäßig* majorisieren kann. Dies bedeutet man findet eine konvergente Reihe, sodass alle Reihenglieder betragsmäßig kleiner als diese sind. Nach dem Majorantenkriterium für Reihen konvergiert demnach auch die untersuchte Reihe selbst. Bei der normalen Konvergenz fordern wir nun noch zusätzlich, dass diese Majorante nicht vom eingesetzten Punkt z abhängt. Wie oben, soll diese Majorante demnach gleichmäßig gewählt werden können, zumindest innerhalb einer Umgebung U .

Nun zur Frage, welcher der beiden Konvergenzbegriffe der stärkere ist: Offensichtlich ist die Definition der normalen Konvergenz etwas einschränkender, denn er bezieht sich immer nur auf Reihen. Wenn wir aber davon absehen, so können wir nun leicht zeigen, dass normal konvergente Reihen auch immer lokal gleichmäßig konvergieren. Die normale Konvergenz umfasst also auch den wichtigen Begriff der lokal gleichmäßigen Konvergenz.

Zu (b): Hier geht es nun zur eigentlichen Übungsaufgabe, und zwar soll eine gegebene Reihe auf die normale Konvergenz untersucht werden. Dazu werden wir erst mal den sinnvollen Definitionsbereich D notieren. Da wir

folgendermaßen umformen können

$$f_n(z) = \frac{1}{\left(z - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{(z - (n + 1))(z - n)},$$

erhalten wir

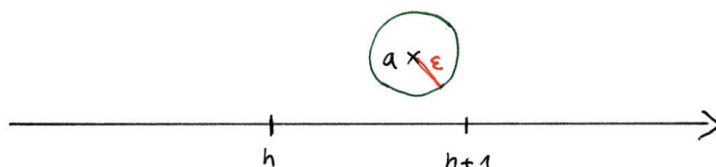
$$z = n \quad \text{und} \quad z = n + 1$$

als Nullstellen des Nenners, sodass wir

$$D := \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$$

für den Definitionsbereich der Reihe setzen.

Um nun die normale Konvergenz zu zeigen, müssen wir nach der Definition für jeden beliebigen Punkt eine Umgebung wählen und die Eigenschaft (8) zeigen. Wir setzen also nun eine beliebige komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ fest. Jetzt ist die Frage, welche Umgebung wir wählen sollen. Wir möchten natürlich möglichst weit von den Polen wegbleiben, da die Funktion dort ja über alle Grenzen wächst. Wir wählen demnach einfach einen kleinen Kreis um a und das Innere als die Umgebung U .



Damit wir wirklich von den Polen wegbleiben, definieren wir der Radius als

$$\epsilon := \frac{1}{2} \min_{n \in \mathbb{N}} |a - n|,$$

d. h. als den halben Abstand zum nächstliegenden Pol. Demnach ist unsere Umgebung nun auch als

$$U := B_\epsilon(a)$$

fest gewählt. Ob die Umgebung wirklich passend ist, wird sich noch her-

ausstellen, aber bisher scheint es eine sehr vernünftige Wahl zu sein. Wir probieren es demnach einfach mal aus. Das macht man in der Mathematik übrigens sehr oft.

Was man bei solchen Aufgaben aber fast immer benötigt sind die Dreiecksungleichung oder auch die umgekehrte Dreiecksungleichung, die ich hier kurz in Erinnerung rufen möchte:

$$|z - w| \geq \left| |z| - |w| \right| . \quad (9)$$

Nun müssen wir jedoch zwei verschiedene Fälle betrachten, denn das eigentliche Problem, das man lösen möchte, tritt ja im Unendlichen erst auf. Für endlich viele Reihenglieder sollte es keine Probleme geben. Wir teilen deswegen das Problem in zwei Teile. Zuerst betrachten wir endlich viele Glieder unter einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ und danach die restlichen unendlich vielen Glieder nach diesem gewissen N . Die Frage bleibt aber wie wir dieses ominöse N nun festlegen. Und dies kann an dieser Stelle noch nicht beantwortet werden. Die Rechnungen, die wir gleich ausführen werden, werden zeigen, wie groß N wirklich sein muss, damit alles passt. Um den Beweis aber formal richtig aufzuschreiben, müssen wir es nun hier an dieser Stelle definieren. Wähle nun

$$N := (|a| + \varepsilon + 1) \cdot 6 .$$

Wie gesagt: Warum wir N genau so wählen, wird sich erst gleich rechtfertigen. Das oben definierte N mag nun keine natürliche Zahl sein, aber wir könnten diese selbstverständlich auch auf eine ganze Zahl aufrunden, wenn wir dies wollten. Das macht keinen Unterschied in der weiteren Betrachtung.

(1) „kleine n “, $n < N$: Wenn nun $z \in B_\varepsilon(a)$ beliebig ist, so gilt in jedem Fall

$$|f_n(z)| = \frac{1}{\underbrace{|z - (n+1)|}_{\geq \varepsilon} \underbrace{|z - n|}_{\geq \varepsilon}} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} =: M_n .$$

Wir haben $B_\varepsilon(a)$ ja genau so gewählt, dass dies gilt. Nun definieren wir für diese endlich vielen n unser M_n als Konstante Zahl. Das macht natürlich

keine Probleme.

(2) „große n “, $n \geq N$: Da wir wissen, dass die Reihe $\sum_n 1/n^2$ eine konvergente ist, sollten wir diese als die Majorante nutzen. In unserer Funktion f_n ist nämlich n^2 , die größte Potenz die im Nenner vorkommt. Wir wissen also, von was wir starten und wissen, was wir zeigen wollen. Den Weg dazwischen müssen wir passend rechtfertigen, und dementsprechend das obige N wählen. Ich schreibe nun die Rechnung auf und erkläre an jeder Stelle, warum dort das N entsprechend groß gewählt sein muss.

Wir wählen nun $z \in U$, also aus der kleinen Kugel von oben. Nach dieser Wahl gilt demnach $|a| + \varepsilon + 1 > |z|$ und somit

$$n \geq N = (|a| + \varepsilon + 1) \cdot 6 > |z| \cdot 6$$

oder anders gesagt

$$\frac{|z|}{n} \underbrace{\left(2 + \frac{1}{n}\right)}_{\leq 6} \cdot 2 < 1. \quad (10)$$

Was diese Ungleichung bringt, werden wir nun in der folgenden Rechnung sehen, aber man erkennt schon, dass genau in dieser die Wahl von N steckt. Damit wir die obige Ungleichung besitzen, haben wir N entsprechend gewählt. Und nun die versprochene Rechnung:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{n^2} \left[\left| \frac{z^2}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 - z \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \right| \right]^{-1} \\ &\stackrel{(9)}{\leq} \frac{1}{n^2} \left[\left| \frac{z^2}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 \right| - \underbrace{\frac{|z|}{n} \left(2 + \frac{1}{n}\right)}_{< 1/2} \right]^{-1} \\ &\stackrel{(9)}{\leq} \frac{1}{n^2} \left[1 - \left| \frac{z}{n} \right|^2 - \left| \frac{1}{n} \right| - \frac{1}{2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Da nun $n \geq N$ gilt und da wir N (natürlich absichtlich) größer als 6 gewählt haben, können wir den großen Betrag nach der umgekehrten Dreiecksungleichung (9) auch wegfällen lassen. Weiterhin können wir den Wert der eckigen

Klammer klein halten:

$$\begin{aligned}
 |f(z)| &\stackrel{(9)}{\leq} \frac{1}{n^2} \left[1 - \underbrace{\left| \frac{z}{n} \right|^2}_{\leq \frac{1}{36} \text{ nach (10)}} - \underbrace{\left| \frac{1}{n} \right|}_{\leq \frac{1}{6}} - \frac{1}{2} \right]^{-1} \\
 &\leq \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{1}{36} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right]^{-1} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{36}{11} \right) \leq \frac{4}{n^2} =: M_n
 \end{aligned}$$

Und das ist nun genau das, was wir zeigen wollten, denn die jetzt für alle $n \in \mathbb{N}$ definierten Zahlen M_n erfüllen ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty ,$$

sodass die normale Konvergenz der Reihe gezeigt ist.

Grenzfunktion bestimmen: Die Grenzfunktion können wir nun einfach punktweise bestimmen. Wir verwenden dabei die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(z - (n + 1))(z - n)} = \frac{1}{z - (n + 1)} - \frac{1}{z - n} .$$

Setzen wir nun N_0 und z fest, so können wir die endliche Summe folgendermaßen ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{(z - (n + 1))(z - n)} &= \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{z - (n + 1)} - \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{z - n} \\
 &= \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{z - (n + 1)} - \sum_{k=0}^{N_0-1} \frac{1}{z - (k + 1)} \quad (k = n - 1) \\
 &= \frac{1}{z - (N_0 + 1)} - \frac{1}{z - 1} \xrightarrow{N_0 \rightarrow \infty} -\frac{1}{z - 1} .
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde die übliche und sogenannte Teleskopsumme verwendet, d. h. nur der erste und letzte Summand verbleiben in der Differenz. Dies bedeutet nun, dass wir die Grenzfunktion der normal konvergenten Reihe gefunden haben:

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} .$$

2.7 Lösung über den Konvergenzradius von Potenzreihen

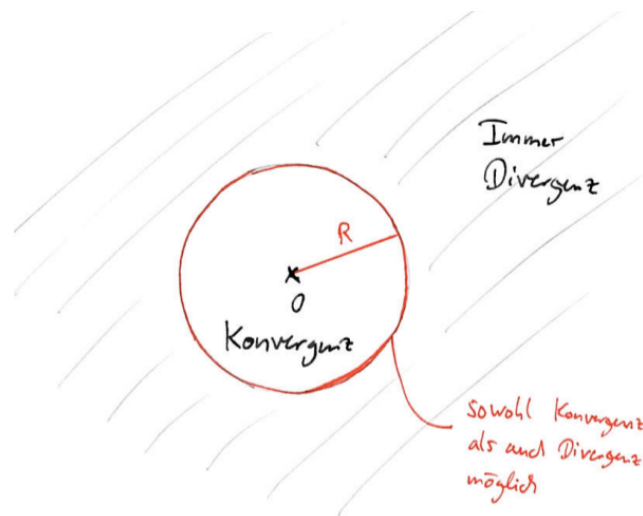
Diese Aufgabe beschäftigt sich mit dem wichtigen Begriff des Konvergenzradius einer Potenzreihe. Eine Potenzreihe ist erst mal eine formale Angabe von einer Folge von Polynomen:

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Nun ist die Frage, für welche eingesetzten Zahlen $z \in \mathbb{C}$ dadurch eine *konvergente* Reihe entsteht. Offensichtlich kann die Konvergenz von z abhängen, denn für $z = 0$ konvergiert jede beliebige Potenzreihe der obigen Form. Es stellt sich nun heraus, dass es für jede Potenzreihe einen festen Radius R in der Form gibt, dass alle für $|z| < R$ die Reihe immer konvergiert, während für $|z| > R$ die Reihe immer divergiert. Aus diesem Grund nennt man diese Zahl den *Konvergenzradius der Potenzreihe*. Dies kann man mit Hilfe des Majorantenkriteriums und der geometrischen Reihe herleiten. Man erhält dann relativ leicht:

$$R = \sup \left\{ \rho \geq 0 \mid (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \right\} . \quad (11)$$

An dieser Stelle sei erwähnt, dass auch die Grenzfälle $R = 0$ und $R = \infty$ als „Radien“ angenommen werden können. Letzteres bedeutet nichts anderes, dass die Reihe für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, was eindeutig der beste Fall ist.



Gleichung (11) ist für die explizite Berechnung des Konvergenzradius leider selten geeignet, sodass man mit Hilfe des Quotienten- und Wurzelkriteriums für Reihen bessere Formeln herleitet. Und genau diese werden wir in der jetzigen Aufgabe auch verwenden.

Berechnungsformeln: Für den Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ einer Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C}$$

gelten folgende zwei Berechnungsformeln:

$$R = \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right]^{-1} \quad \text{mit } 0 := \frac{1}{\infty}, \quad \infty := \frac{1}{0} \quad (12)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq R \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{mit } a_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq N \quad (13)$$

Theoretisch kann man beide Formeln immer anwenden, aber man erkennt sofort, dass die zweite Formel möglicherweise R noch nicht ganz festlegt. Mit dieser kann man nur eine untere und eine obere Schranke festlegen. In vielen Beispielen werden diese beide aber zusammen fallen. Die erste Formel ist immer dann anzuwenden, wenn die Wurzel Potenzen passend weghebt, während man bei der zweiten Formel möchte, dass sich Quotienten passend

wegheben. Wir sehen also, dass man mit dem ersten Blick auf die Potenzreihe schon direkt weiß, welche Formel die bessere Wahl sein wird.

Zu (a): Hier haben die Koeffizienten eine einfache Struktur einer Potenz, sodass sogar beide Formeln leicht anzuwenden sind. Wir präsentieren hier die Lösung mit der Formel (13). Da alle Koeffizienten ungleich 0 sind, können wir folgendes berechnen:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^{-n}}{2^{-n}2^{-1}} = 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit existiert auch der Grenzwert und es gilt $R = 2$.

Zu (b): Hier sind die Koeffizienten etwas komplizierter und der gemischte Ausdruck mit n als Basis als auch als Exponent empfiehlt hier eher wieder Formel (13). Da alle Koeffizienten ungleich 0 sind, können wir folgendes berechnen:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^3 3^{-n}}{(n+1)^3 3^{-n} 3^{-1}} = 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit existiert auch der Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ und es gilt $R = 3$.

Zu (c): Hier sind nun tatsächlich manche der Koeffizienten Null, auch wenn man es nicht direkt sieht. Aber um auf die Standardgestalt der Potenzreihe zu kommen, müssen wir folgende Umformung vornehmen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} z^{3n} = \sum_{k \in B} 3^{-\frac{k}{3}} z^k \quad \text{mit } B := \{3, 6, 9, \dots\} = 3\mathbb{N}$$

Demnach hat unsere Reihe die Darstellung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} z^{3n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \quad \text{mit } a_k := \begin{cases} 3^{-\frac{k}{3}} & , k \in B \\ 0 & , k \notin B \end{cases}$$

Die Formel des Quotientenkriteriums ist somit auf Anhieb nicht verwendbar, aber die Potenz der Koeffizienten lässt sowieso das Wurzelkriterium mit (12)

als das sinnvollere erscheinen. Wir berechnen nun:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(3^{-\frac{k}{3}}\right) = 3^{-\frac{1}{3}} \quad \text{für } k \in B$$

Der Limes superior gibt uns demnach genau diesen Wert, d. h.

$$R = \sqrt[3]{3} .$$

Zu (d): Hier ist wegen des Exponentens n^2 nur das Wurzelkriterium (12) sinnvoll. Wir berechnen dazu

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e .$$

Demnach ist der Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{e} .$$

Zu (e): In dieser Aufgabe werden wir nur erstmals ein wenig anders mit Gleichung (12) argumentieren müssen. Dazu sollte man wissen, dass für $n \geq 3$ gilt:

$$1 \leq \log(n) \leq n .$$

Wenn wir nun davon die n -te Wurzel ziehen, die ja monoton wachsend auf \mathbb{R}^+ ist, dann erhalten wir:

$$1 \leq (\log(n))^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 ,$$

wobei wir das Wissen über den letzten Grenzwert voraussetzen. Nun haben wir also den Grenzwert von $(\log(n))^{\frac{1}{n}}$ zwischen zwei Einsen eingeschlossen und erhalten demnach:

$$R = 1 .$$

2.8 Lösung über die geometrische Reihe in Potenzreihen

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit dem wohl wichtigsten rechnerischen Trick in der Einführung in die Funktionentheorie. Viele Potenzreihen lassen sich leicht aus der geometrischen Reihe bestimmen, sodass der Rechenaufwand gering bleibt und auch der Konvergenzradius sofort bekannt ist.

Zu (a): Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat einen Konvergenzradius von $R = 1$, was auch die Berechnungsformeln sofort ergeben (siehe dazu auch Blatt 7). Demnach wissen wir, dass die Potenzreihe normal auf der offenen Kugel $B_1(0)$ konvergiert. Diese normale Konvergenz schließt aber immer die lokal gleichmäßige Konvergenz ein, welche benötigt wird um Grenzwertprozesse zu vertauschen. Wir dürfen also die Differentiation und den Reihengrenzwert auf Grund der lokal gleichmäßigen Konvergenz vertauschen, d. h.

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \right) \frac{1}{z}$$

für alle $z \in B_1(0)$.

Diese Untersuchung haben wir durchgeführt, da wir die Grenzfunktion der geometrischen Reihe sehr gut kennen, denn diese lautet

$$\frac{1}{1-z} \quad \text{für } z \in B_1(0) .$$

Das bedeutet aber, dass wir auch auf Ableitungen und Integrationen dieser Funktion zurückgreifen können. In unserem Fall hat die obige Berechnung schon gezeigt, dass die Ableitung ein passender Kandidat für die gegebene Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

ist. Wir können nun also die Reihe mit Hilfe der Ableitung folgendermaßen umschreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{z}{(1-z)^2} .$$

Somit haben wir die passende Grenzfunktion gefunden. In der Umformung kann sich der Konvergenzradius nicht geändert haben und auch eine Überprüfung mit den passenden Formeln ergibt $R = 1$.

Zu (b): Die zweite Reihe sieht sehr ähnlich aus und besitzt als Koeffizienten n^2 , sodass wir den gleichen Ableitungstrick nochmals anwenden können:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = z \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n z^n \right) \stackrel{(a)}{=} z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(1-z)^2} \right) = z \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Auch hier ändert sich der Konvergenzradius nicht, sodass weiterhin $R = 1$ gilt.

Zu (c): An dieser Stelle wäre es unglaublich aufwendig, den üblichen Weg über die expliziten Ableitungen im Entwicklungspunkt zu gehen. Man müsste nicht nur sehr viele Terme berücksichtigen, sondern letztendlich auch einen sauberen und kompletten Induktionsbeweis für die allgemeine Gestalt der Taylorkoeffizienten aufschreiben. Wenn wir jedoch die sehr gut bekannte Reihendarstellung der Exponentialfunktion verwenden, ist die Aufgabe sehr schnell gelöst. Wir verwenden die Reihe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

die einen Konvergenzradius von $R = \infty$ besitzt. Aus diesem Grund können wir auch immer z durch z^2 ersetzen und die folgende Umformung aufschreiben:

$$f(z) = e^{z^2+i} = e^i e^{z^2} = e^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!} z^{2n}$$

Auch hier bleibt der Konvergenzradius von $R = \infty$ erhalten.

Zu (d): Ebenfalls wäre es an dieser Stelle unglaublich aufwendig, den üblichen Weg über die expliziten Ableitungen im Entwicklungspunkt zu gehen. Wir können aber hier wieder die bekannte Form der geometrischen Reihe verwenden, wiederum mit dem Wissen, dass diese einen Konvergenzradius von $R = 1$ besitzt. Davor müssen wir unsere Funktion aber noch passend

umformen:

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{iz}{\sqrt{3}} \right)^2} \right).$$

Diese Umformung findet man sehr oft in der Funktionentheorie, denn die geometrische Reihe kennt man sehr gut und viele Funktionen lassen sich durch die obigen Art auf diese zurückführen. Man erhält deswegen leicht und schnell Potenzreihen und später die sogenannte Laurentreihen von schwierigen Funktionen. Man beachte, dass in der obigen Rechnung die Zahl i nur eingefügt wurde, um das Minus im Nenner zu erhalten. Das ist für die geometrische Reihe wesentlich.

Wir haben nun also die folgende geometrische Reihe erhalten:

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{mit } w := \left(\frac{iz}{\sqrt{3}} \right)^2 \quad \text{für } |w| < 1.$$

Nun rechnen wir damit also weiter:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{iz}{\sqrt{3}} \right)^2} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{iz}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)^n \quad \text{mit } R = \sqrt{3} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{iz}{\sqrt{3}} \right)^{2n} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}} z^{2n}. \end{aligned}$$

Um die geometrische Reihe zu verwenden, muss man einen Konvergenzradius von $R = \sqrt{3}$ voraussetzen und dieser bleibt auch beim endgültigen Ergebnis erhalten.

2.9 Lösung über den Identitätssatz

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einer sehr wichtigen Eigenschaft von holomorphen Funktionen, nämlich dem sogenannten Identitätssatz. Er legt eine sehr einschränkende Eigenschaft für holomorphe Funktionen fest und zwar reicht es aus, die Funktion auf einer kleinen Mengen, z. B. auf einer kleiner Linie oder sogar nur auf bestimmten Punktmengen, zu kennen. Die holomorphe Funktion ist dann sofort auf dem gesamten Gebiet festgelegt.

Es lohnt sich an dieser Stelle den Identitätssatz in seiner ganzen Schönheit aufzuschreiben. Ein *Gebiet* ist hier immer eine offene und zusammenhängende Menge, d. h. zwei Punkte können immer durch einen stetigen Weg verbunden werden.

Identitätssatz. Es seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen auf dem Gebiet G . Dann stimmen die Funktionen f und g genau dann auf ganz G überein, wenn die Menge

$$\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$$

einen Häufungspunkt *in* G besitzt.

Es gibt auch andere Formulierungen des Identitätssatzes, aber dieser ist zumindest für diese Aufgabe die beste Formulierung. Es besagt, dass es reicht eine Teilmenge von $A \subset G$ zu untersuchen, von der man weiß, dass die zwei Funktionen f und g dort übereinstimmen. Dann muss man nur noch überprüfen, ob diese Menge der „bekannten Übereinstimmungspunkte“ A einen Häufungspunkt *in* G besitzt. Ganz wichtig beim Identitätssatz ist wirklich dieses kleine Wort „in“, denn es bringt leider nichts, wenn der Häufungspunkt außerhalb des Gebietes G liegt.

Sinnvoll ist es nun ebenfalls, nochmals den Begriff des Häufungspunkts einer Menge zu wiederholen.

Häufungspunkt einer Menge. Es sei eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ gegeben. Der Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt ein *Häufungspunkt* von A , wenn es in jeder Umgebung von a noch mindestens einen weiteren Punkt aus der Menge A gibt oder auch kurz gesagt, wenn

$$A \cap (B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

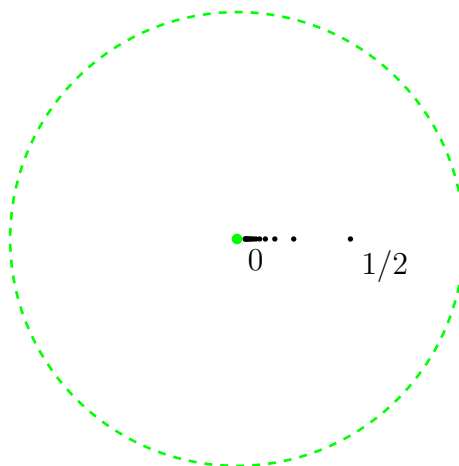
Anschaulich gesprochen handelt es sich also bei einem Häufungspunkt einer Menge A um einen Punkt, der in seiner Nachbarschaft immer unendlich viele andere Punkte aus der jeweiligen Menge A hat. Er ist also nicht isoliert von der Rest der Menge.

Nach dieser kurzen Vorarbeit können wir nun endlich mit der Lösung beginnen: In dieser Aufgabe sind zwei Bedingungen für die Funktion zu erfüllen. Wir beginnen erstmal mit der einfacheren, nämlich, dass

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Die erste Feststellung ist hier, dass die Menge $A := \left\{\frac{1}{2k} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ einen Häufungspunkt in $B_1(0)$ besitzt, nämlich die Null.



Dies bedeutet aber, dass, wenn wir eine holomorphe Funktion f auf $B_1(0)$ finden, die diese erste Bedingung erfüllt, es nicht noch eine zweite geben kann. Der Identitätssatz besagt ja genau dies. Nun gibt es glücklicherweise eine leicht zu erratene Funktion:

$$f(z) = 2z .$$

Diese ist natürlich holomorph auf dem ganzen Einheitskreis und erfüllt die zweite Bedingung von oben. Nach dem Identitätssatz kann es nun keine andere holomorphe Funktion mehr geben, die diese zweite Bedingung löst. Wir müssen demnach nur noch schauen, ob auch die erste Bedingung für dieses f erfüllt ist:

$$f\left(\frac{1}{2k-1}\right) = \frac{2}{2k-1} \neq \frac{1}{k} = f\left(\frac{1}{2k}\right) .$$

Wir sehen, dass diese erste Bedingung für keine einzige natürlich Zahl $k \in \mathbb{N}$ erfüllt werden kann. Unsere Schlussfolgerung ist also, dass es solch eine holomorphe Funktion f , die beide Bedingungen erfüllt, nicht geben kann.