Aufgabensammlung zur Analysis 3

Inhaltsverzeichnis

Um die Mathematik zu lernen, muss man sie selbst angewendet haben. Aus diesem Grund gibt es unzählige Übungsaufgaben in allen Themenbereichen. Nun hat man aber nicht immer die richtige Idee oder Zeit eine Übungsaufgabe komplett zu durchdringen. Manchmal hat man solange darüber nachgedacht, dass man verzweifelt.

Nun gibt es mit Sicherheit irgendwo Lösungsskizzen oder -ideen zu finden, die oft als „Musterlösungen" angepriesen werden. Das ist aber der falsche Weg, denn ein Ergebnis vorgelegt zu bekommen oder schnell die verschiedenen Schritte herunterzurattern, missachtet die eigentliche Denkarbeit innerhalb der Übungsaufgabe.

Ich möchte genau diese Lücke mit dieser Aufgabensammlung schließen, indem ich die Lösung mit allen Gedankenschritten und Informationen fülle, die man hat und braucht, wenn man die Aufgabe wirklich lösen möchte. Ich zeichne die Bilder und Skizzen, welche man für seine Gedanken benötigt hat. Die Intention ist, dass der Leser alle Schritte nachvollziehen kann und jederzeit den Beweis und die Lösung selbstständig weiterführen kann, sobald „der Groschen gefallen ist".

Im Idealfall solltest du die Lösung zu einer Aufgabe erst lesen, wenn du dir schon genügend Gedanken über die Aufgabe gemacht hast, sodass dir die Lösung auf die Sprünge helfen oder Lücken schließen kann.

Es kommt nun aber oft vor, dass man mit der Aufgabe nichts anfangen kann, aber man eine Klausur oder Prüfung vor sich hat. In diesem Fall kann man die umfangreiche und ausführliche Lösung als eine Lernhilfe verwenden, die du lesen kannst, um das Thema besser zu verstehen und die Rechenideen zu verinnerlichen.

Selbstverständlich kannst du die Lösung auch als Überprüfung für deine eigene Lösung nutzen. Manchmal ist man sich nicht sicher, ob alle Werkzeuge richtig angewendet wurden, sodass man hier nochmals eine anschaulich erklärte und detailliert dargestellte Lösung einsehen kann.

1 Aufgaben

1.1 Aufgabe über iterierte Integrale

Berechnen Sie die folgenden zweidimensionalen Integrale:

(a)

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(x-y)^2\,dx\right)dy$$

(b)

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}|x-y|\;dx\right)dy$$

(c)

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\cos(xy)\,dx\right)dy$$

(d)

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1}(x+y)^2\,dx\right)dy$$

Hier geht es zur Lösung.

1.2 Aufgabe über das Integral des Sinus cardinalis

Es sei die folgende Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert:

$$\mathsf{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie nun die folgenden drei Eigenschaften:

(a)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\pi}^{R}\mathsf{sinc}(x)\,dx \quad \text{existiert} \quad ,$$

(b)

$$\lim_{R\to\infty}\int_\pi^R \mathsf{sinc}(x)\,dx \;\in\; [-2/\pi, 0]\ ,$$

(c)

$$\lim_{R\to\infty}\int_\pi^R |\mathsf{sinc}(x)|\;dx \;=\; \infty\ .$$

Ist die Funktion sinc auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar? Wie sieht es dagegen mit der Riemann-Integrierbarkeit aus?

Hier geht es zur Lösung.

1.3 Aufgabe über Fresnel-Integrale

(a) Es sei die folgende Funktionenfolge gegeben:

$$f_k(y) := \int_0^{2\pi k} e^{-y^2 x}\sin(x)\,dx\ .$$

Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall monoton wachsend gegen

$$f(y) = \frac{1}{1+y^4}$$

konvergiert.

(b) Schreiben Sie für alle natürlichen Zahlen $k \in \mathbb{N}$ das Integral

$$I(k) = \int_{[0,2\pi k]\times\mathbb{R}} e^{-y^2 x}\sin(x)\,d^2(x,y)$$

auf zwei verschiedene Arten in ein eindimensionales Integral um.

(c) Berechnen Sie dann mit Hilfe der Ergebnisse von (a) und (b) das Fresnel-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t^2)\,dt\ .$$

Hinweis: Benutzen Sie den Integralwert $\int_{-\infty}^{\infty}(1+y^4)^{-1}dy = \pi\sqrt{2}/2$.

Hier geht es zur Lösung.

1.4 Aufgabe über Dirac-Folgen

Es sei die folgende Funktionenfolge $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben:

$$\delta_n(x) := \begin{cases} n\,, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine sogenannte Dirac-Folge handelt.

(b) Zeigen Sie explizit für die obige Funktionenfolge, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$

für alle stetigen Funktionen φ gilt.

Hier geht es zur Lösung.

1.5 Aufgabe über Laplace-Gleichung und Satz von Lebesgue

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge und $\rho : K \to \mathbb{R}^3$ Lebesgue-integrierbar.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \setminus K \to \mathbb{R}$, die durch

$$u(x) = \int_K \frac{\rho(y)}{\|x-y\|_2}\,dy$$

definiert ist, unendlich oft differenzierbar ist und die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus K$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie die obige Funktion u für den Fall, dass K eine Kugelschale mit den Radien R_1 und R_2 ist, wobei $0 \leq R_1 < R_2 < \infty$ gelten soll, und $\rho \equiv 1$ gilt.

Bemerkung: Eine mögliche physikalische Interpretation des obigen Sachverhaltes ist, dass ρ eine elektrische Ladungsdichte definiert und u ergibt (bis auf Konstanten) dann das elektrische Potential zu dieser Ladungsverteilung.

Hier geht es zur Lösung.

2 Lösungen

2.1 Lösung über iterierte Integrale

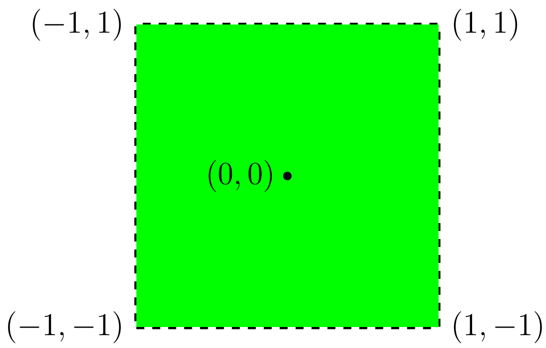
Diese Aufgabe ist eine relativ typische Rechenübung zum Start in die mehrdimensionale Integrationstheorie. Das zweidimensionale Integral wird hier als ein iteriertes Integral beschrieben und berechnet, d. h. es werden nacheinander zwei bekannte eindimensionale Integrale gelöst.

Zu (a): Wenn man solch eine Rechenaufgabe vorgelegt bekommt, so sollte man sich zuerst die Zeit nehmen und auf Vereinfachungen achten, bevor man sich auf die eigentliche Rechnung stürzt. In diesem Fall wird die Funktion

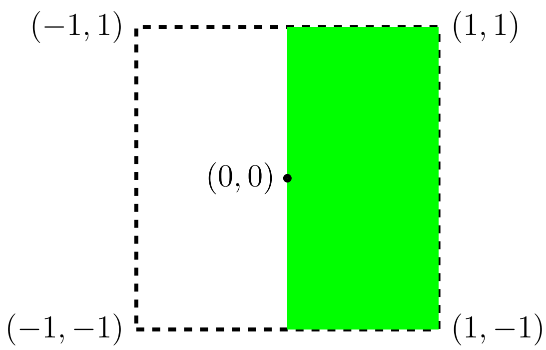
$$(x, y) \longmapsto (x - y)^2 \tag{1}$$

über das um den Ursprung symmetrische Quadrat integriert:

JP-G.de



Die Funktion ist auf dem gesamten Quadrat positiv und man kann auch eine gewisse Symmetrie erkennen, nämlich eine Symmetrie bei Punktspiegelung zum Ursprung. Das heißt, es würde uns reichen nur die rechte Seite des Integral zu berechnen und mit 2 zu multiplizieren. Dazu nochmal eine Zeichnung:



Die linke Hälfte besitzt offenbar den gleichen Wert. Nach dieser schnellen

Vereinfachung können wir nun die Berechnung aufstellen:

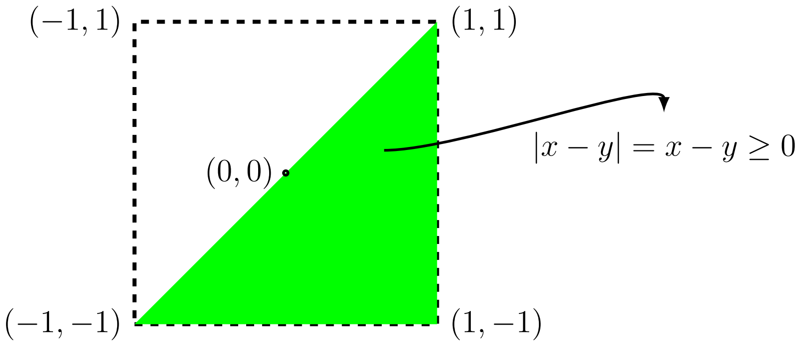
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(x-y)^2\,dx\right)dy &= 2\cdot\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}(x-y)^2\,dx\right)dy \\
&= 2\cdot\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}(x^2+y^2-2xy)\,dx\right)dy \\
&= 2\cdot\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}+y^2-y\right)\,dy \\
&= 2\cdot\left(\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}\,dy}_{=2\cdot\frac{1}{3}}+\int_{-1}^{1}y^2\,dy\;-\;\underbrace{\int_{-1}^{1}y\,dy}_{=0}\right) \\
&= 2\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{8}{3}\,.
\end{aligned}$$

Bei solch einer Rechnung sollte man Terme mit ungeraden Funktionen, die symmetrisch über $[-1,1]$ integriert werden, direkt wegfallen lassen. Man spart sich dann unter Umständen sehr viele Rechnungen.

Zu (b): Diese Aufgabe sieht sehr ähnlich zu der vorherigen aus. Die Funktion

$$(x,y)\longmapsto |x-y| \tag{2}$$

ist ebenfalls immer nicht-negativ und auch das Integrationsgebiet ist das gleiche geblieben. Es gilt sogar das gleiche Symmetrieargument, sodass wir uns wieder nur auf eine Hälfte des Gebietes konzentrieren könnten. Hier stellt uns jedoch der Betrag vor ein paar explizite Rechenschwierigkeiten. Es wäre besser die Betragstriche durch eine übliche Fallunterscheidung zu eliminieren. In unserer Zeichnung sieht es dann wie folgt aus:



Da wir hier wieder die gleiche Punktsymmetrie verwenden können, reicht es uns, das grüne Dreieck zu integrieren und mit 2 zu multiplizieren. Das andere Dreieck besitzt für das Integral natürlich den gleichen Wert. Beachte nun, dass in der folgenden Rechnung der x-Wert nur innerhalb des Intervalls $[y,1]$ laufen kann, denn wie in der Zeichnung erwähnt gilt ja $x \geq y$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}|x-y|\;dx\right)dy &= 2\cdot\int_{-1}^{1}\left(\int_{y}^{1}|x-y|\;dx\right)dy \\
&= 2\cdot\int_{-1}^{1}\left(\int_{y}^{1}(x-y)\,dx\right)dy \\
&= 2\cdot\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}(1-y)^2-\frac{1}{2}(y-y)^2\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1}(1-y)^2\,dy \\
&= -\frac{1}{3}\left(0-2^3\right) \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

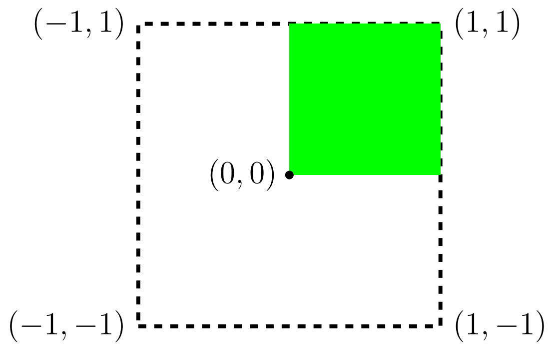
Zu (c): Diese Aufgabe ist deutlich komplizierter formuliert als die ersten zwei Aufgaben und es stellt sich auch heraus, dass sich das Integral nicht elementar lösen lässt. Wir begnügen uns deswegen mit der folgenden einfachen

Umformung:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\cos(xy)\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{\sin(xy)}{y}\right]_{x=-1}^{x=1} dy$$
$$= 2\cdot\int_{-1}^{1}\frac{\sin(y)}{y}dy$$
$$= 4\cdot\int_{0}^{1}\frac{\sin(y)}{y}dy \;=\; 3.784...$$

Hier wurde zuerst ausgenutzt, dass die Sinusfunktion ungerade ist und im letzten Schritt wurde benutzt, dass $\sin(y)/y$ dagegen gerade ist. Man erhält somit einen Ausdruck des geforderten zweidimensionalen Integrals in Form eines gut bekannten eindimensionalen Integrals. Der Wert ist numerisch bekannt, sodass wir diesen noch dazugeschrieben haben.

Zu (d): Das letzte Integral sieht dem Integral aus dem Aufgabenteil (a) sehr ähnlich und wir können in der Tat alle Argumente von oben wieder verwenden. Einzig und allein das Integrationsgebiet hat sich verkleinert. Wir integrieren nun also wirklich nur über das kleine obere Quadrat:



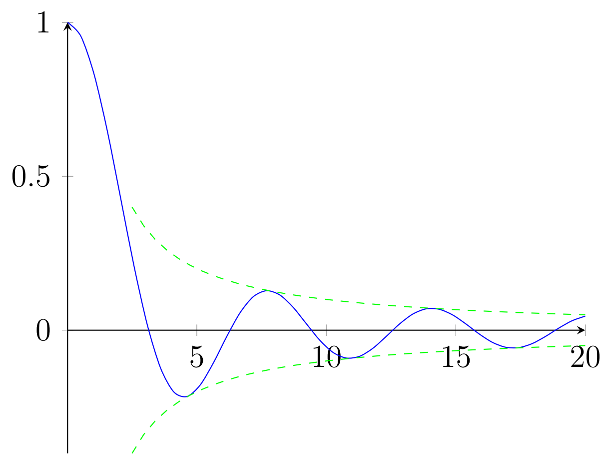
Wir rechnen nun also wie gehabt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)^2 \, dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)^2 \, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2 + 2xy) \, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + y \right) \, dy \\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{7}{6} \, .
\end{aligned}$$

2.2 Lösung über das Integral des Sinus cardinalis

Diese Aufgabe befasst sich mit dem üblichen Beispiel einer Funktion, die nicht Lebesgue-integrierbar ist, jedoch uneigentlich Riemann-integrierbar. Genau diese zwei Dinge werden hier nachgeprüft und es wird eine Abschätzung für den Integralwert geliefert.

Zu (a): Zu Beginn dieser Aufgabe lohnt es sich in jedem Fall, die Funktion zu zeichnen.



Die einhüllende Funktionsgraphen sind durch $\pm 1/x$ gegeben und grün gezeichnet. Da der Sinus nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann, befindet sich der Graph der Funktion immer innerhalb dieses „Schlauchs“ bzw. es gilt:

$$|\mathsf{sinc}(x)| \leq \frac{1}{x} \ .$$

Wie man nun auch gut erkennt, besitzt das Integral positive und negative Anteile, sodass wir diese am besten getrennt aufsummieren. Dazu müssen wir einfach nur die Nullstellen des Integranden bestimmen. Diese sind durch den Sinus gegeben, d. h. die Nullstellen sind

$$R_n = \pi \cdot n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \ .$$

Nun führen wir den Grenzwert $R \to \infty$ aus, indem wir $n \to \infty$ betrachten, d. h. wir schauen uns nun das folgende Integral an

$$\int_\pi^{R_n} \mathsf{sinc}(x)\, dx = \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_1^n \frac{\sin(y\pi)}{y}\, dy \ ,$$

wobei wir $y = x/\pi$ substituiert haben. Nun können wir wie schon versprochen das Integral schrittweise zwischen den Nullstellen integrieren. Wir erhalten dann die folgende Summe:

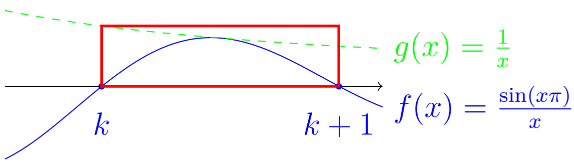
$$\int_\pi^{R_n} \mathsf{sinc}(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{y}\, dy \ .$$

Wenn wir nun an dieser Stelle die Vorzeichen der verschiedenen Beiträge beachten, so können wir die Summe folgendermaßen umschreiben:

$$\int_\pi^{R_n} \mathsf{sinc}(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k I_k \qquad \text{mit } I_k := \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin(y\pi)}{y} \right| dy \ .$$

Diese I_k bilden nun nach unserer Skizze oben eine monoton fallende Nullfolge. Wir können dies auch noch explizit mit einer Riemannschen Obersumme abschätzen und aufschreiben:

$$I_k \leq \frac{1}{k} \cdot 1 \xrightarrow{k \to \infty} 0 \ .$$



Nach dem Leibnizkriterium für Reihen, was hoffentlich in der Analysis I behandelt wurde, konvergiert nun die obige Reihe und damit existiert auch der Grenzwert

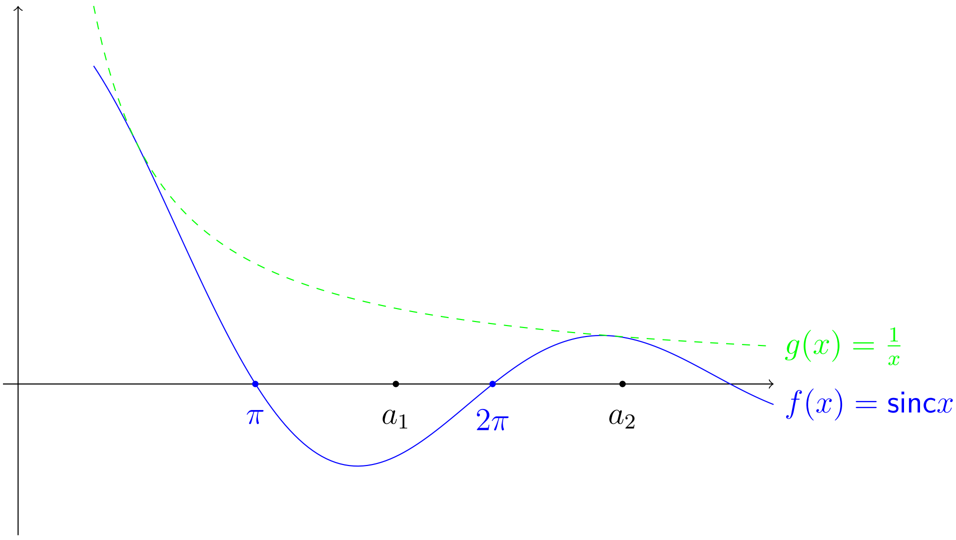
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{R_n} \text{sinc}(x)\, dx \ .$$

Kleine Ergänzung: Der ganz vorsichtige Leser hat vielleicht eine kleine Lücke im obigen Beweis entdeckt. Das ist nun tatsächlich nur eine Kleinigkeit, die ich aber noch klären möchte. Diesen Abschnitt kann man aber getrost erstmal überspringen.

Wir haben den Grenzwert $R \to \infty$ ja durch eine bestimmte Folgen R_n ersetzt und damit nicht das ganze Problem abgedeckt. Wir müssten die Aussage ja eigentlich für jede beliebige Folge zeigen. Dies lässt sich nun jedoch ganz leicht noch ergänzen. Wir wählen nun einfach eine beliebige Folge $(a_n) \subset [\pi, \infty)$ mit $a_n \to \infty$. Als aller erstes können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Folge etwas passend zurecht legen: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ soll

$$a_n \in (R_n, R_{n+1})$$

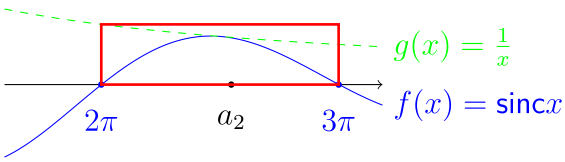
liegen. Dies ist durch Hinzufügen oder Weglassen von Folgengliedern immer zu erreichen und es sei nochmal erwähnt, dass uns nur der Grenzwert nach Unendlich interessiert! Die Beiträge der Integralteile werden immer kleiner.



Dies liegt natürlich an der Einhüllenden $1/x$, sodass wir das Integral über die neue Folge (a_n) schon sehr gut kennen, nämlich:

$$\int_\pi^{R_n} \text{sinc}(x)\,dx - \pi \cdot \left(\frac{1}{\pi n}\right) \;\leq\; \int_\pi^{a_n} \text{sinc}(x)\,dx \;\leq\; \int_\pi^{R_n} \text{sinc}(x)\,dx + \pi \cdot \left(\frac{1}{\pi n}\right)$$

Wir haben den zusätzlichen Beitrag für jeden Schritt des Integrals ganz grob mit einem Rechteck abgeschätzt, d. h. Länge auf der x-Achse ist der Abstand der Nullstellen (π) und die Länge nach oben bzw. unten ist der größtmögliche Wert der Funktion ($1/(\pi n)$).



Nach der obigen Ungleichung finden wir also eine „Sandwichsituation“ für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_\pi^{R_n} \text{sinc}(x)\,dx \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \int_\pi^{a_n} \text{sinc}(x)\,dx \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \int_\pi^{R_n} \text{sinc}(x)\,dx$$

und dies bedeutet, dass in Wirklichkeit Gleichheitszeichen dort oben stehen. Somit haben wir unsere Aussage auch für eine beliebige Folge (a_n) verifiziert.

Zu (b): In diesem Aufgabenteil benötigen wir nochmals die Nullstellen R_n und die Umformulierung aus Teil (a):

$$\int_\pi^{R_n} \mathsf{sinc}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{y}\,dy\ .$$

In dieser Form ist es nun leicht möglich, dass Integral zwischen zwei Werten einzuschließen, manche sprechen dann gerne auf von einem Sandwich, wobei die Anschauung sich selbst erklärt:

$$\int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{k+1}\,dy \ \le\ \int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{y}\,dy \ \le\ \int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{k}\,dy \qquad \text{für } k \text{ gerade}\,,$$

$$\int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{k}\,dy \ \le\ \int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{y}\,dy \ \le\ \int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{k+1}\,dy \qquad \text{für } k \text{ ungerade}\,.$$

Was haben wir hier getan? Wir haben die Zahl y im Nenner einmal durch den größtmöglichen Wert im Integrationsgebiet ersetzt, nämlich $k+1$, und einmal durch den kleinstmöglichen Wert ersetzt, nämlich k. Nun muss man aber noch darauf achten, dass wir für gerade k ein positives Integral haben, was uns unsere Zeichnung zeigt. Für ein ungerades k sind wir jedoch unter der x-Achse und es liegt ein negatives Integral vor. Demnach haben wir die obige Ungleichung einmal in die eine und einmal in der andere Richtung. Leider müssen wir an dieser Stelle die Fallunterscheidung vornehmen.

Nun möchten wir aber wieder die Summe vor die Integrale schreiben. Die beiden Ungleichungen ergeben nun die folgende wichtige Formel:

$$\sum_{k\ \text{gerade}}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \sin(y\pi)\,dy \ +\ \sum_{k\ \text{ungerade}}^{n-1} \frac{1}{k} \int_k^{k+1} \sin(y\pi)\,dy \ \le \tag{3}$$

$$\le\ \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\sin(y\pi)}{y}\,dy}_{=\int_\pi^{R_n} \mathsf{sinc}(x)\,dx} \ \le \tag{4}$$

$$\le\ \sum_{k\ \text{ungerade}}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \sin(y\pi)\,dy \ +\ \sum_{k\ \text{gerade}}^{n-1} \frac{1}{k} \int_k^{k} \sin(y\pi)\,dy \tag{5}$$

Diese Ungleichskette mag etwas groß geworden sein, aber sie sagt etwas ganz einfaches aus: Unser gewünschtes Integral steckt nun größenmäßig zwischen zwei Werten fest und diese müssen wir nun untersuchen. In den ganzen Summen links und rechts steckt jedoch nur ein einfaches Sinus-Integral und dieses müssen wir berechnen. Das ergibt allerdings ganz schnell:

$$\int_k^{k+1} \sin(y\pi)\, dy \;=\; \frac{2}{\pi}\cos(k\pi) \;=\; \frac{2}{\pi} \cdot (-1)^k \;.$$

Dieses Wissen können wir nun die Gleichungen einsetzen. Wir beginnen mal ganz chronologisch mit dem Ausdruck in Gleichung (3):

$$\begin{aligned} c_n := \sum_{k \text{ gerade}}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \sin(y\pi)\, dy \;+ \sum_{k \text{ ungerade}}^{n-1} \frac{1}{k} \int_k^{k+1} \sin(y\pi)\, dy \\ = \frac{2}{\pi}\left[\sum_{k \text{ gerade}}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k \text{ ungerade}}^{n-1} \frac{1}{k}\right] \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \begin{cases} -1 + \frac{1}{n} & , n \text{ ungerade} \\ -1 & , n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die letzte Fallunterscheidung ist eigentlich ganz einfach, aber man sollte es sich an dieser Stelle genau überlegen und am besten an Beispielen verifizieren. Nun machen wir das gleiche für Gleichung (5):

$$\begin{aligned} C_n := \sum_{k \text{ ungerade}}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \sin(y\pi)\, dy \;+ \sum_{k \text{ gerade}}^{n-1} \frac{1}{k} \int_k^{k+1} \sin(y\pi)\, dy \\ = \frac{2}{\pi}\left[\sum_{k \text{ ungerade}}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k \text{ gerade}}^{n-1} \frac{1}{k}\right] \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \begin{cases} \frac{1}{n} & , n \text{ gerade} \\ 0 & , n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun können wir in unserer lange Ungleichungskette, hier nochmals mit den Abkürzungen von eben ausgeschrieben

$$c_n \;\leq\; \int_\pi^{R_n} \text{sinc}(x)\, dx \;\leq\; C_n \;,$$

den Grenzwert von $n \to \infty$ in allen drei Teilen durchführen. Wir erhalten

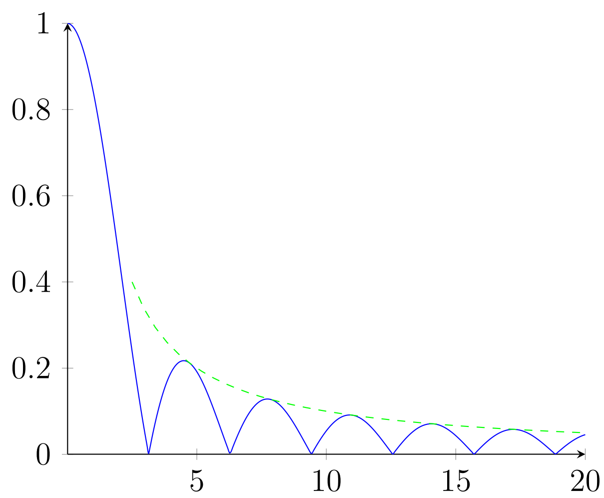
JP-G.de

dann mit den obigen Berechnungen:

$$-\frac{2}{\pi} \;\leq\; \int_{\pi}^{\infty} \text{sinc}(x)\,dx \;\leq\; 0 \;.$$

Dieses uneigentliche Riemann-Integral existiert also in der Tat mit einem endlichen Wert im Intervall $[-\frac{2}{\pi}, 0]$.

Zu (c): In diesem Aufgabenteil können wir fast alles von dem vorherigen Argumenten verwenden. Der einzige Unterschied in unserer Betrachtung ist ja nur, dass alle negativen Integralbeiträge plötzlich positiv sind. Die Funktion wird durch den Betrag anschaulich nach oben geklappt:



Das gesamte Umschreiben mit den Nullstellen funktioniert genauso und so erhalten völlig analog zu oben, die folgende Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int\limits_{k}^{k+1} |\sin(y\pi)|\; dy \;\leq\; \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k}^{k+1} \left|\frac{\sin(y\pi)}{y}\right| \; dy}_{=\int_{\pi}^{R_n} |\text{sinc}(x)|\,dx} \;\leq\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \int\limits_{k}^{k+1} |\sin(y\pi)|\; dy$$

Nur dieses mal müssen wir keine Unterscheidung zwischen gerade und ungeraden Indices machen, da wir nun nur positive Beiträge aufsummieren.

Diese Ungleichung bedeutet nun wieder, dass wir nun nur noch das einfache Sinus-Integral rechts und links der obigen Ungleichung bestimmen müssen.

Dieses ergibt wieder ganz schnell:

$$\int_k^{k+1} |\sin(y\pi)| \; dy \;\geq\; \left| \int_k^{k+1} \sin(y\pi) \, dy \right| \;=\; \frac{2}{\pi} \, |\cos(k\pi)| \;=\; \frac{2}{\pi} \; .$$

Nun können wir unser Integral nach unten abschätzen, indem wir von der Ungleichungskette von eben, nur die linke Seite nehmen:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \;\leq\; \int_\pi^{R_n} |\mathsf{sinc}(x)| \; dx \; .$$

Herrje, auf der linken Seite steht nun aber eine harmonische Reihe und das ist wohl das Paradebeispiel einer divergenten Reihe. Im Grenzwert $n \to \infty$ finden wir nun

$$\lim_{R \to \infty} \int_\pi^R |\mathsf{sinc}(x)| \; dx = \infty \; ,$$

was genau zu zeigen war.

Aus dieser Aufgaben können wir nun schließen, dass sinc nicht auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist, denn sonst hätte das Integral über den Betrag einen endlichen Wert. Allerdings existiert das Integral im uneigentlichen Riemann-Sinne, d. h. der Grenzwert der Integrale über beschränkten Intervalle aus Teil (a) existiert.

2.3 Lösung über Fresnel-Integrale

Diese Aufgabe befasst sich mit den einem nach dem Physiker Augustin Jean Fresnel benannten uneigentlichen Integral, welches eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik spielt. Wir berechnen es hier mit Hilfe der Lebesgue'schen Integrationstheorie und üben damit sehr wichtige Sätze ein.

Zu (a): In dieser Aufgabe sollen wir zeigen, dass Folge (f_k) punktweise monoton wachsend ist. Das heißt aber nichts anderes als

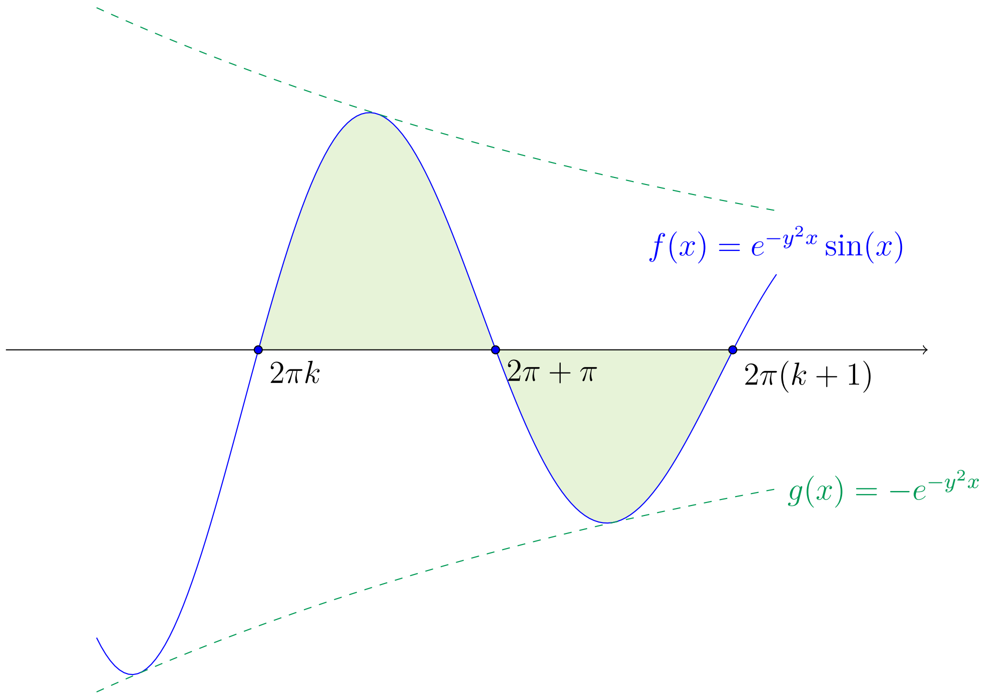
$$f_{k+1}(y) - f_k(y) \geq 0 \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R} \, , \;\; k \in \mathbb{N} \; .$$

Da wir hier ein Integral vorliegen haben, führt uns diese Differenz auf die

Ungleichung

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{-y^2 x}\sin(x)\,dx \geq 0 \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Diese werden wir nun also zu beweisen versuchen, indem wir die linke Seite soweit umformen bis wir rechts angelangt sind. Doch zuallererst sollten wir den zu integrierenden Bereich aufzeichnen:



Die Erkenntnis hier ist also, dass der erste Teil des Integrals positiv ist, während der zweite negativ ist. Das Bild lässt schon vermuten, dass die Summe diese zwei Teile immer positiv oder höchstens Null sein kann und genau dies werden wir nun beweisen:

$$\begin{aligned}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{-y^2 x}\sin(x)\,dx \;&=\; \int_{2\pi k}^{2\pi+\pi} e^{-y^2 x}\sin(x)\,dx \;+\; \int_{2\pi+\pi}^{2\pi(k+1)} e^{-y^2 x}\sin(x)\,dx\\ &=\; \int_{2\pi k}^{2\pi+\pi} e^{-y^2 x}\sin(x)\,dx \;+\; \int_{2\pi}^{2\pi k+\pi} e^{-y^2 u}e^{-y^2\pi}\sin(u+\pi)\,du\,.\end{aligned}$$

Was hier sehr formellastig aussieht, war in der Tat nur eine einfache Substitution $u := x - \pi$, um das zweite Integral auf die Grenzen des ersten zu

JP-G.de

schieben. Nun können wir weiter zusammenfassen:

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{-y^2 x} \sin(x)\, dx =$$
$$= \int_{2\pi k}^{2\pi+\pi} e^{-y^2 x} \sin(x)\, dx \;+\; e^{-y^2 \pi} \int_{2\pi}^{2\pi k+\pi} e^{-y^2 u} \underbrace{\sin(u+\pi)}_{=-\sin(u)}\, du$$
$$= \Big(1 - \underbrace{e^{-y^2\pi}}_{\leq 1}\Big) \cdot \int_{2\pi k}^{2\pi+\pi} \underbrace{e^{-y^2 x} \sin(x)}_{\geq 0}\, dx \;\geq\; 0\,.$$

Genau das war zu zeigen. Beachte in dieser Rechnung, dass das Integral am Ende genau der positive Anteil aus der Zeichnung ist. Die Funktionenfolge ist demnach für alle $y \in \mathbb{R}$ monoton wachsend.

Die Grenzfunktion existiert also und nun wollen wir zeigen, dass diese zumindest fast überall mit der gegebenen Funktion f übereinstimmt. Dazu müssen wir das Integral explizit lösen und am einfachsten ist es, die Sinusfunktion mit der Eulerformel ebenfalls in Exponentialfunktionen umzuformen, denn diese lassen sich nun mal sehr einfach integrieren:

$$\int_0^{2\pi k} e^{-y^2 x} \sin(x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[\int_0^{2\pi k} \left(e^{x(\mathrm{i}-y^2)} - e^{x(-\mathrm{i}-y^2)} \right) dx \right]$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[\frac{1}{\mathrm{i}-y^2} \left(e^{2\pi k(\mathrm{i}-y^2)} - 1 \right) + \frac{1}{\mathrm{i}+y^2} \left(e^{-2\pi k(\mathrm{i}+y^2)} - 1 \right) \right]$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(e^{-2\pi k y^2} - 1 \right) \left[\frac{1}{\mathrm{i}-y^2} + \frac{1}{\mathrm{i}+y^2} \right]$$
$$= \left(1 - e^{-2\pi k y^2}\right) \left[\frac{1}{1+y^4} \right] \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \begin{cases} 0 & ,\ y = 0 \\ \frac{1}{1+y^4} & ,\ y \neq 0 \end{cases}$$

Wir erkennen im letzten Schritt sehr schnell, dass die Null eine Ausnahme bildet. Diese „zerstört“ nämlich die abfallende Exponentialfunktion. Für alle anderen y-Werte gibt es jedoch kein Problem und wir kommen wirklich auf die gewünschte Grenzfunktion. Da diese nur für einen einzigen Punkt nicht gilt, haben wir selbstverständlich die Konvergenz *fast überall* gezeigt, denn eine Einpunktmenge ist eine Lebesgue'sche Nullmenge.

Zu (b): Die in der Aufgabenstellung beschriebene zwei Verfahren beziehen sich natürlich auf den Satz von Fubini-Tonelli, der uns erlaubt die Integration in zwei Reihenfolgen auszuführen. Zur Vollständigkeit schreiben wir diesen hier auf:

Fubini-Tonelli. Es sei eine reelle messbare Funktion $f : A \times B \to \mathbb{R}$ mit $A, B \subset \mathbb{R}$ gegeben. Falls eines der iterierten Integrale

$$\int_B \Big(\int_A |f(x,y)| \; dx \Big) \, dy \,, \quad \int_A \Big(\int_B |f(x,y)| \; dy \Big) \, dx$$

existiert, so gilt die Gleichheit der folgenden Integrale:

$$\int_{A \times B} f(x,y) \, d^2(x,y) \; = \; \int_B \Big(\int_A f(x,y) \, dx \Big) \, dy \; = \; \int_A \Big(\int_B f(x,y) \, dy \Big) \, dx \, .$$

Für eine Funktion, welche nirgends negativ ist, kann der Satz von Fubini-Tonelli also immer angewendet werden. Im schlimmsten Falle sind alle drei Integrale unendlich, aber selbst dann stimmen sie ja (symbolisch) überein.

Unsere zu integrierende Funktion $e^{-y^2 x} \sin(x)$ ist zwar nicht immer positiv, allerdings ist der Betrag der Funktion in jedem Fall integrierbar, denn es gilt

$$\Big| e^{-y^2 x} \sin(x) \Big| \leq e^{-y^2 x} \; .$$

Die abfallende Exponentialfunktion ist ohne Schwierigkeiten auf der gesamten Menge $[0, 2\pi k] \times \mathbb{R}$ integrierbar. Dadurch erhalten wir durch den Satz von Fubini-Tonelli zwei Integrationsreihenfolgen, die wir nun aufschreiben werden.

Erste Art: Hier integriere wir zuerst nach y und erhalten dann:

$$I(k) = \int_0^{2\pi k} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 x} \sin(x) \, dy \Big) \, dx = \int_0^{2\pi k} \left(\sin(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy^2} \, dy}_{=\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \right) dx$$

$$= \sqrt{\pi} \int_0^{2\pi k} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \, dx \qquad (6)$$

JP-G.de

Dies ist das eindimensionale Integral, was die Aufgabe verlangt hat.

Zweite Art: Hier integriere wir zuerst nach x und erhalten dann:

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi k} e^{-y^2 x} \sin(x)\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(y)\, dy \tag{7}$$

Dies ist ein eindimensionales Integral, wie es die Aufgabe verlangt hat.

Zu (c): Nun kommen wir zum wesentlichen Teil der Aufgabe, nämlich der Berechnung des Fresnelintegrals. Wir schreiben dies nun auf und formen es passend um:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t^2)\, dt &= \int_{-\infty}^{0} \sin(t^2)\, dt + \int_0^{\infty} \sin(t^2)\, dt \\
&= 2 \cdot \int_0^{\infty} \sin(t^2)\, dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{(mit Substitution } x = t^2\text{)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi k} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(y)\, dy \qquad \text{(mit Gleichung (6) und (7))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{k\to\infty} f_k(y)\, dy\,.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle lohnt es sich, kurz zu pausieren und Erklärungen zu bringen. Zuerst haben wir nur umgeformt und dann Teil (b) verwendet, der besagt, dass die zwei eindimensionalen Integrale nach Fubini-Tonelli übereinstimmen müssen. Im letzten Schritt kam nun ein anderer wichtiger Satz aus der Lebesgue'schen Integrationstheorie ins Spiel, nämlich der *Satz von der monotonen Konvergenz*. Da die Folge (f_k) monoton wachsend ist, dürfen wir den Grenzwertprozess ins Integral hineinziehen. Dies ist sehr wichtig und muss an solch einer Stelle immer gerechtfertig werden!

Nun können wir weiter rechnen und die Ergebnisse von Teil (a) weiter verwenden:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t^2)\, dt &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{k\to\infty} f_k(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^4}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(siehe Hinweis)} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\end{aligned}$$

Das ist nun der Wert des Fresnel-Integral.

2.4 Lösung über Dirac-Folgen

Diese Aufgabe befasst sich mit den sogenannten Dirac-Folgen, die eine wichtige Rolle in der Analysis und Physik spielen. Hier werden wir eine bestimmte Folge untersuchen und dabei auch einen sehr wichtigen Satz der Integrationstheorie wiederholen und anwenden.

Zu (a): In diesem Aufgabenteil müssen wir die Eigenschaften einer Dirac-Folge wiederholen. Dazu geben wir am besten erst die Definition an:

Definition einer Dirac-Folge. Eine Funktionenfolge $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\delta_n \in L^1(\mathbb{R})$ gilt, heißt *Dirac-Folge*, wenn:

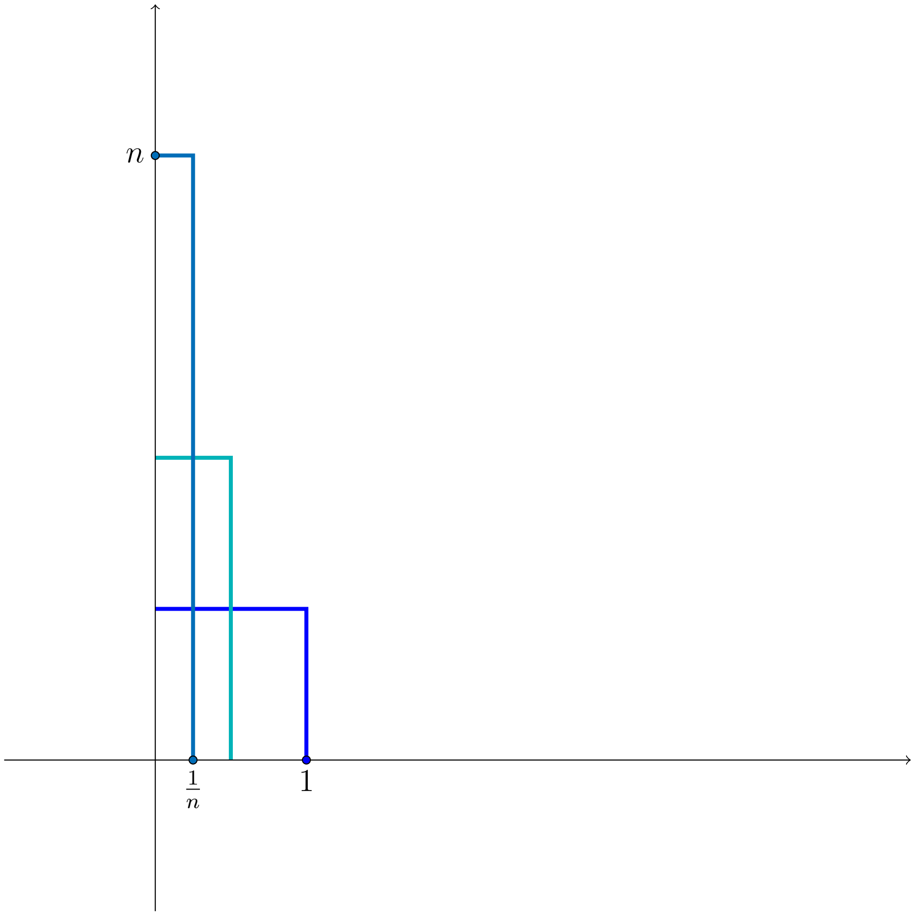
(1) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\delta_n(x) \geq 0$.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Normierung $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\, dx = 1$.

(3) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \delta_n(x)\, dx = 0\ .$$

Für unsere gewählte Folge sind die ersten Eigenschaft wirklich ganz leicht nachzuweisen: Die Funktion ist per definitionem nirgends negativ und da $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ gilt, ist auch das Integral über die Funktion immer 1. Zur besseren Anschauung zeichnen wir uns mal die ersten Folgeglieder als Graphen auf, die auf der nächsten Seite zu finden sind. Man erkennt gut, dass sich der Funktionsgraph immer weiter Richtung y-Achse verschiebt. Der Bereich, in welchem die Funktion nicht Null ist, wird immer kleiner, sodass auch Eigenschaft (3) gelten muss. Dazu können wir natürlich auch noch einen kurzen formalen Beweis geben:



Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle dann eine natürliche Zahl N mit $1/N < \varepsilon$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \delta_N(x)\,dx = 0$$

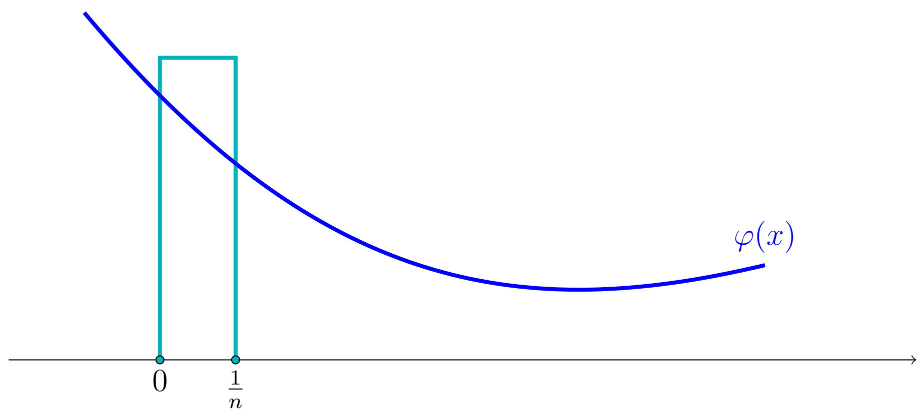
und somit verschwindet auch der Grenzwert in Eigenschaft (3).

Zu (b): Dies ist nun der wesentliche Teil der Aufgabe. Wir untersuchen nämlich nun ein Lebesgue-Integral und benötigen zum Lösen des gefragten Grenzwertes die Konvergenzsätze aus der Integrationstheorie.

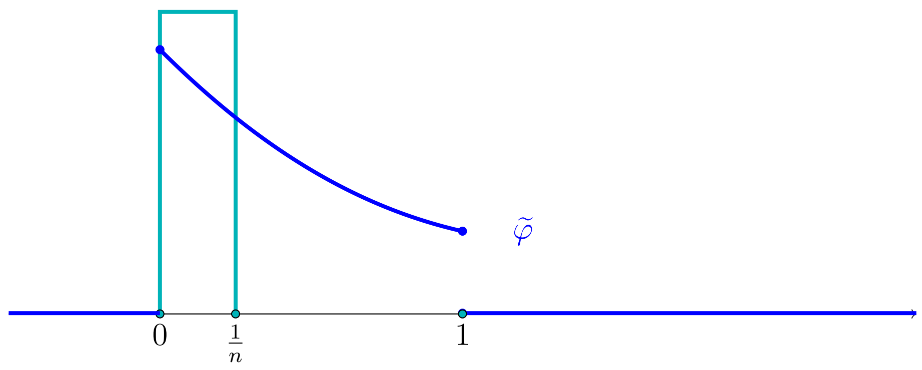
Schauen wir uns doch erstmal an, um was es eigentlich geht. Das Integral des Produktes zweier Funktionen soll berechnet werden:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\,dx \ .$$

Beide Funktionen sind natürlich messbar und ohne Probleme auf einem beschränkten Intervall integrierbar. Hier liegt nun aber ganz $\mathbb{R}$ als Integrationsgebiet und man sollte sich erstmal fragen, ob dieses Integral überhaupt einen endlichen Wert bekommen kann.



Die folgende Zeichnung zeigt uns die stetige Funktion φ und die Funktion δ_n für irgendein festes $n \in \mathbb{N}$. Wir sehen sofort, dass es völlig egal ist, was die Funktion außerhalb des wichtigen Intervall $[0, \frac{1}{n}]$ macht, denn außerhalb drückt δ_n alles auf die Null. Wir können also anstatt der Funktion φ auch die Funktion $\tilde{\varphi}$ integrieren, die wir dadurch definieren, dass wir sie außerhalb von $[0, 1]$ Null setzen:



Dies bedeutet unser Integral sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{[0,\frac{1}{n}]} n\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{[0,\frac{1}{n}]} n\,\widetilde{\varphi}(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \widetilde{\varphi}\left(\frac{y}{n}\right)dy \quad \text{mit Substitution } y = n\cdot x\,.\end{aligned}$$

Der Vorteil von $\widetilde{\varphi}$ ist nun, dass es sich immer um eine beschränkte Funktion handelt. Das macht vieles einfacher und vor allem könnte man den Konvergenzsatz nach Lebesgue verwenden. An dieser Stelle lohnt es sich in jedem Falle diesen nochmal nachzuschlagen. Wir formulieren ihn hier für den Fall des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$, denn das ist genau das, war wir gleich benötigen werden. Der Satz gilt natürlich in einem viel größeren Kontext, indem man einen allgemeinen messbaren Raum und ein Maß auf diesem betrachtet.

JP-G.de

Satz von Lebesgue. Es sei eine Folge von messbaren Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise konvergent gegen eine messbare Funktion f und es gelte

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für $x \in \mathbb{R}$ fast überall und zwar für eine messbare Funktion g, welche

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx < \infty$$

erfüllt. Dann darf man den folgenden Grenzwertprozess durchs Integral ziehen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

Der Satz von Lebesgue wird in der Analysis sehr oft verwendet und wird auch regelmäßig als *Satz von der majorisierten Konvergenz* oder als *Satz von der dominierten Konvergenz* bezeichnet. Dies natürlich aus dem naheliegenden Grund, dass man eine *integrierbare* Majorante g für die Funktionenfolge benötigt. Diese Eigenschaft macht den Satz so gut anwendbar. Es ist völlig egal, was die Funktionenfolge genau macht, solange man sie grob nach oben mit einer integrierbaren Funktion abschätzen kann.

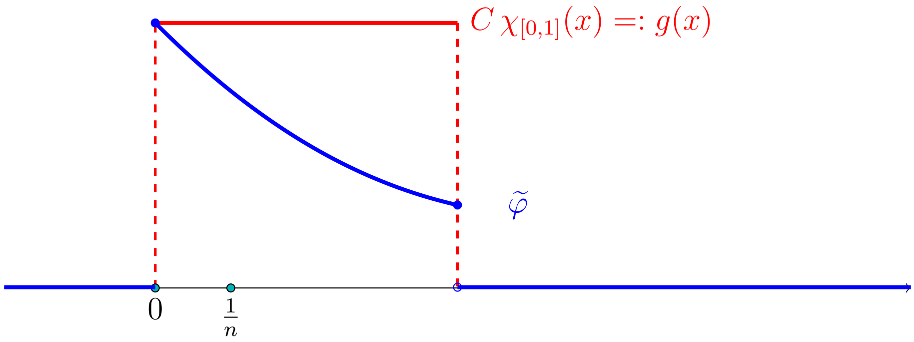
Wir werden für unser obiges Integral nun genau solch eine Majorante suchen. Wir haben das Integral vorhin umgeformt:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\varphi}\left(\frac{y}{n}\right)\chi_{[0,1]}(y)\, dy \ .$$

Diese Darstellung haben wir so mit der Substitution gewählt, dass die n-Abhängigkeit aus dem Integratiosbereich herausfällt und nur noch im Integranden steckt. Jetzt können wir nämlich den Satz von Lebesgue anwenden, indem wir uns die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \widetilde{\varphi}\left(\frac{x}{n}\right)\chi_{[0,1]}(x)$$

anschauen. Nun zeigen wir dazu erstmal, dass wir eine integrierbare Majorante g finden, was aber anschaulich aus der Zeichnung klar sein sollte.



Es gilt

$$|f_n(x)| \leq C\chi_{[0,1]}(x) =: g(x) \;,$$

wobei C das Maximum von $\widetilde{\varphi}$ darstellt. Dieses g ist natürlich wunderbar integrierbar, sodass wir nun nur noch die Grenzfunktion von (f_n) bestimmen müssen. Diese ist nun:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \widetilde{\varphi}\left(\frac{x}{n}\right)\chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin [0,1] \\ \lim_{n\to\infty} \varphi(x/n) & , \quad x \in [0,1] \end{cases} \\ &= \varphi(0) \cdot \chi_{[0,1]}(x)\end{aligned}$$

Wenn $x \in [0,1]$ liegt, so führt die Stetigkeit von φ dann auf $\varphi(0)$. Für $x = 0$ bleiben wir für jedes n sowieso auf $\varphi(0)$ sitzen. Damit ist nun eigentlich alles gesagt. Wir können nun letztendlich den Satz von Lebesgue anwenden, da alle Voraussetzungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \\ &= \varphi(0) \int_0^1 \,dx \\ &= \varphi(0)\,.\end{aligned}$$

Und damit ist die Aufgabe gelöst.

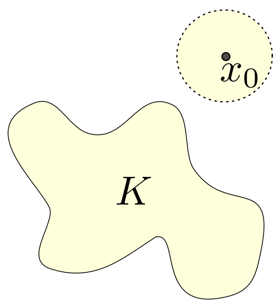
JP-G.de

2.5 Lösung über Laplace-Gleichung und Satz von Lebesgue

Diese Aufgabe befasst sich mit der sogenannten Laplace-Gleichung, die eine enorm wichtige Rolle in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und vielen Anwendungen in Physik oder Technik besitzt. Trotzdem spielt die Gleichung nur eine Nebenrolle innerhalb dieser Aufgabe, denn der eigentliche Sinn der Übung ist, sich mit Lebesgue-Integralen und dem Satz von Lebesgue (majorisierte Konvergenz) zu befassen.

Zu (a): In diesem Aufgabenteil sind einige einzelne Dinge zu zeigen, sodass wir diese etwas gliedern werden. Das wichtigste hier wird der *Satz von Lebesgue* in der Lebesgue'schen Integrationstheorie sein, den wir aus diesem Grund später nochmals genau wiederholen und erklären werden.

Erstmal hilft uns die Vorstellung, dass der Definitionsbereich von u, nämlich $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus K$, eine offene Menge ist. Wir können das Problem also komplett lokal untersuchen und einfach eine beliebige kleine Kugel herausgreifen. Wir wählen demnach $x_0 \in \Omega$ für den gesamten Beweis fest und nehmen eine kleine offene Kugel um diesen Punkt:



Wir können nun anstatt die gesamte Funktion u einfach die lokale Variante betrachten:

$$v := u|_{B_{d/2}(x_0)} \ .$$

Dies bedeutet, dass wir die Funktion nur noch auf der obigen kleinen Kugel

JP-G.de

betrachten. Hierbei steht d für den Abstand von x_0 zu der kompakten Menge:

$$d := \inf\{\|x_0 - z\|_2 \mid z \in K\} \ .$$

Somit stimmen die Formeln nun mit dem obigen Bild überein.

Zur Abkürzung für alles Folgende, definieren wir noch eine Funktion außerhalb der Null $\gamma : \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{d/2}(0)} \to \mathbb{R}$ durch

$$\gamma(x) := \|x\|_2^{-1} \ .$$

Die Funktion tritt in der Aufgabenstellung unter dem Integral auf und sie hat die Eigenschaft, beschränkt zu sein, da sie nach Unendlich hin abfällt, und unendlich oft differenzierbar zu sein.

Nach diesen Definition und Vereinfachungen können wir nun endlich mit der Aufgabe beginnen.

(1) v bzw. u ist wohldefiniert: Das ist bei solchen Aufgaben immer die erste Frage. Ergibt die Definition überhaupt einen Sinn? Dazu muss die Funktion unter dem Integralzeichen Lebesgue-integrierbar sein, was genau dann erfüllt ist, wenn der Betrag einen endlichen Integralwert hat. Wir wählen ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ und berechnen demnach:

$$\int_K \frac{|\rho(y)|}{\|x-y\|_2}\, dy$$

Der Nenner $\|x - y\|_2$ ist natürlich niemals Null, da x einen positiven Abstand von der kompakten Menge K hat. Wir nennen diese Abstand hier b und können nun abschätzen:

$$\int_K \frac{|\rho(y)|}{\|x-y\|_2}\, dy \ \leq \ \frac{1}{b}\int_K |\rho(y)| \ dy \ \leq \ \frac{1}{b}\|\rho\|_{L^1} \ < \ \infty \ .$$

Somit existiert $u(x)$ für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$, sodass natürlich auch v wohldefiniert ist.

(2) v bzw. u ist stetig: Die Stetigkeit von v zeigen wir über die Folgenstetigkeit

und dann mit Hilfe des Satzes von Lebesgue. Diesen benötigen wir, um den Grenzwert ins Integral ziehen zu können.

Wir wählen also einen Punkt aus dem Definitionsbereich $x \in B_{d/2}(x_0)$ und eine beliebige Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \to x$. Um die Stetigkeit zu zeigen, müssen wir nun

$$\lim_{k\to\infty} v(x_k) \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_K \rho(y)\gamma(x_k - y)\, dy \;\overset{!}{=}\; v(x)$$

beweisen. Wir möchten an dieser Stelle also den Grenzwert unter das Integralzeichen ziehen und das bringt uns der Satz von Lebesgue:

Satz von Lebesgue. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und alle folgende Funktionen seien auf Ω definiert. Es sei eine Folge von messbaren Funktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall punktweise konvergent gegen eine messbare Funktion f und es gelte

$$|f_k(x)| \le g(x) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

für $x \in \Omega$ fast überall und zwar für eine messbare Funktion g, welche

$$\int_\Omega |g(x)|\; d\mu(x) < \infty$$

erfüllt. Dann darf man den folgenden Grenzwertprozess durchs Integral ziehen:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, d\mu(x)$$

Hier ist unsere Funktionenfolge (f_k) durch

$$f_k(y) := \rho(y)\gamma(x_k - y)$$

gegeben, welche sogar für alle $y \in K$ punktweise gegen die messbare Funktion $f(y) = \rho(y)\gamma(x - y)$ konvergiert. Nun müssen wir also nur noch eine integrierbare Majorante g finden und der Satz ist anwendbar. Wir erinnern an den Beginn der Lösung, als wir γ definierten und auf die Beschränktheit hingewiesen haben. Es gilt demnach:

$$|f_k(y)| \le \|\gamma\|_\infty \, |\rho(y)| =: g(y)\ .$$

Da ρ Lebesgue-integrierbar ist, ist es natürlich auch g und wir haben alles, was wir benötigen:

$$\lim_{k\to\infty} v(x_k) = \lim_{k\to\infty} \int_K \rho(y)\gamma(x_k - y)\, dy \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_K \lim_{k\to\infty} \rho(y)\gamma(x_k - y)\, dy = v(x)$$

Dies zeigt die Stetigkeit von v.

(3) v bzw. u ist C^∞: Aus dem Satz von Lebesgue lässt sich relativ leicht einen Differentiationssatz folgern. Auch hier benötigen wir wieder eine integrierbare Majorante g. Diese rechtfertigt dann, dass man eine Ableitung bzw. eine partielle Ableitung in das Integral hineinziehen kann. Das ist also völlig analog zum Hineinziehen eines Grenzwertes, jedoch benötigt man ein paar Notationen. Der Satz ist zur Referenz auf der nächsten Seite aufgeführt.

Für uns ist dieser Satz nun natürlich für die Funktion $f(x, y) := \rho(y)\gamma(y - x)$ anzuwenden, da dies die Funktion unter dem Integralzeichen ist. Da die Funktion γ, wie von uns festgestellt wurde, schon unendlich oft differenzierbar ist, ist natürlich auch unser f unendlich oft bezüglich der Variablen x differenzierbar. Nun können wir aber auch sofort eine integrierbare Majorante für die Ableitung finden, denn

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, y)\right| \leq \left\|\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right\|_\infty |\rho(y)| =: g(y) \ .$$

Die Funktion g is nach Voraussetzung an ρ integrierbar und nun können wir den besagten Differentiationssatz anwenden.

Differentiation unter dem Integralzeichen. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für eine Abbildung $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $x \in X$ ist $f(x, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und Lebegue-integrierbar.

(2) Für $y \in \Omega$ fast überall ist $f(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar.

(3) Es gibt eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, y) \right| \leq g(y)$$

für alle $x \in X$, $y \in \Omega$ und $\nu = 1, \ldots n$.

Dann ist auch die Funktion $F(x) = \int_\Omega f(x, y)\, d\mu(y)$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, y)\, d\mu(y)$$

für alle $\nu = 1, \ldots n$.

Der Satz bringt uns nun, dass die Funktion v stetig differenzierbar ist und die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\frac{\partial v}{\partial x_\nu}(x) = \int_K \rho(y) \frac{\partial \gamma}{\partial x_\nu}(x - y)\, dy \ .$$

Diese ganze Argumentation können wir nun auch für die zweiten Ableitungen und sogar alle höheren Ableitungen durchführen. Ein leichtes Induktionsargument bringt uns somit zu dem Ergebnis, dass v unendlich oft differenzierbar ist.

(4) Laplace-Operator anwenden: Nachdem wir in Punkt (3) nachgewiesen haben, dass wir alle partiellen Ableitungen von beliebiger Ordnung in das Integral hineinziehen dürfen, können wir nun leicht rechnen:

$$\Delta v(x) = \int_K \rho(y) \Delta\gamma(x - y)\, dy = 0 \ .$$

An dieser Stelle muss man natürlich nachrechnen, dass

$$\Delta\gamma(z) = \Delta\frac{1}{\|z\|} = 0$$

für alle $z \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{d/2}(0)}$ gilt. Das ist aber eine leichte elementare Rechnung mit partiellen Ableitungen. Diese sei jedem ans Herz gelegt.

Wir haben also nachgewiesen, dass $\Delta v(x) = 0$ für alle $x \in B_{d/2}(x_0)$ gilt. Da der Punkt x_0 aber von Anfang an beliebig gewählt war, gilt demnach letztendlich

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3 \setminus K \ .$$

Zu (b): In diesem Aufgabenteil müssen wir ein explizites Integral lösen, was zu einer länglichen Rechnung wird:

$$u(x) = \int_K \frac{1}{\|x-y\|_2}\, dy = \int_K \langle x-y, x-y\rangle^{-1/2}\, dy\,.$$

Hier notieren wir mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidsche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und können dies nun folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_K \langle x-y, x-y\rangle^{-1/2}\, dy \\ &= \int_K \left[\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\langle x,y\rangle\right]^{-1/2}\, dy \\ &= \int_K \left[\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\|x\|_2\|y\|_2 \cos(\angle(x,y))\right]^{-1/2}\, dy\,. \end{aligned}$$

Hier haben wir den Winkel zwischen den zwei Vektoren eingeführt und somit das Skalarprodukt ausgedrückt. Da wir über ein kugelsymmetrisches Gebiet integrieren können wir eine Transformation durchführen, die den Vektor x auf die z-Achse dreht. Dies lässt uns $\angle(x,y) =: \theta$ dann als den Polarwinkel des Vektors y zur z-Achse interpretieren, sodass wir das Integral mit Kugelkoordinanten leicht vereinfachen können:

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_K \left[\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\|x\|_2\|y\|_2\cos(\angle(x,y))\right]^{-1/2} dy \\ &= \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\|x\|_2^2 + r^2 - 2r\|x\|_2\cos(\theta)\right]^{-1/2} r^2\sin(\theta)\, d\varphi\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi\int_{R_1}^{R_2} r^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{a - b\cos(\theta)}}\, d\theta\, dr\,. \end{aligned}$$

Hier haben wir $a = \|x\|_2^2 + r^2$ und $b = 2r\|x\|_2$ definiert. Dies hilft uns nun eine Substitution mit $\xi = a - b\cos(\theta)$ durchzuführen:

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\pi\int_{R_1}^{R_2} r^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{a - b\cos(\theta)}}\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi\int_{R_1}^{R_2} r^2 \int_{a-b}^{a+b} \frac{1}{b\sqrt{\xi}}\, d\xi\, dr\,. \end{aligned}$$

Dies kann man nun leicht integrieren und die Ersetzungen danach wieder rückgängig machen, sodass wir nur noch das Integral über r zu lösen haben:

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\pi\int_{R_1}^{R_2} r^2 \int_{a-b}^{a+b} \frac{1}{b\sqrt{\xi}}\, d\xi\, dr \\ &= \frac{2\pi}{\|x\|_2}\int_{R_1}^{R_2} r\Big((\|x\|_2 + r) - \big|\|x\|_2 - r\big|\Big)\, dr\,. \end{aligned}$$

Um den Betrag integrieren zu können, ist eine Fallunterscheidung notwendig. Entweder sind wir außerhalb der Kugel oder im Kugelinnern. Wir erhalten demnach:

$$u(x) = \begin{cases} 2\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right) & ,\|x\| < R_1 \\ \frac{4}{3}\pi\frac{1}{\|x\|_2}\left(R_2^3 - R_1^3\right) & ,\|x\| > R_2 \end{cases}\,.$$

Diese beendet die doch sehr lange Rechnung.