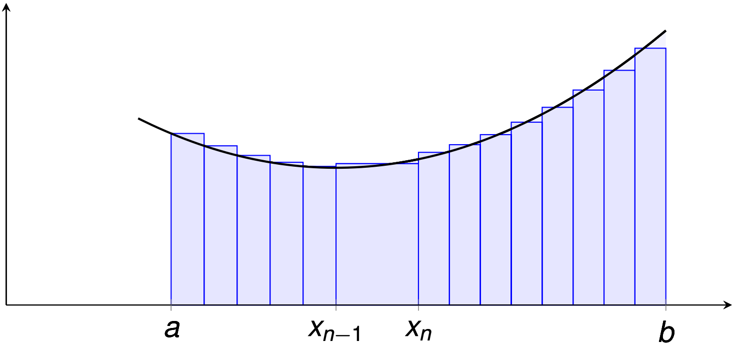
9 Riemann-Integral für Funktionen einer Variablen

Integral = (orientierte) Fläche zwischen Funktion
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse
$\approx \sum_n (x_n - x_{n-1}) f(\xi_n)$ mit Zwischenpunkten $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$



Alternative: Lebesgue–Integral durch Zerlegung der y-Achse

Definition 9.1

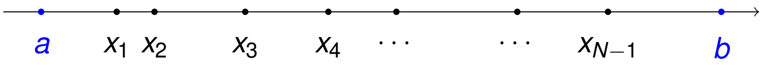
(i) Zerlegung Z des endlichen Intervalls $[a, b]$ ist gegeben durch Punkte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ mit endlichem $N \in \mathbb{N}$

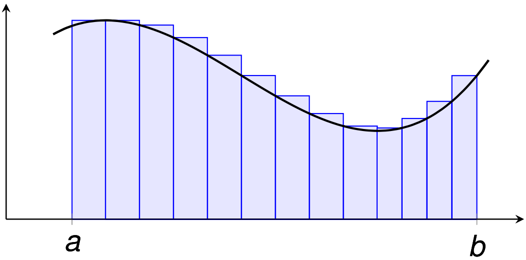
(ii) Zerlegung Z' feiner als Zerlegung Z (Schreibweise $Z \leqslant Z'$) $\iff$ jeder Punkt in Z ist auch in Z'

(iii) Gegeben Zerlegungen Z und Z', entsteht Verfeinerung $Z \cup Z'$ durch deren Überlagerung

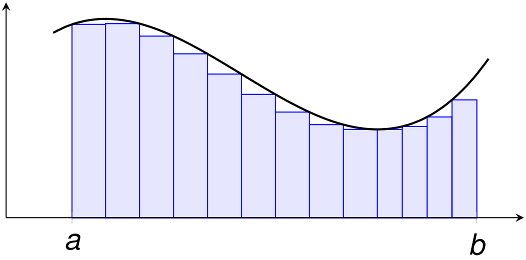
(iv) $\mathcal{F}(Z) = \max_{n=1,\ldots,N} \Delta x_n$ mit $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ ist Feinheit von Z

$$Z = \{x_1, \ldots, x_{N-1}\}$$





Obersumme $O_Z(f)$



Untersumme $U_Z(f)$

Definition 9.2 (Riemann Integral)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktion und Z Zerlegung von $[a, b]$

(i) Untersumme $U_Z(f)$ und Obersumme $O_Z(f)$ sind

$$U_Z(f) = \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \cdot m_n \,, \qquad m_n = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{n-1}, x_n]\}$$

$$O_Z(f) = \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \cdot M_n \qquad M_n = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{n-1}, x_n]\}$$

(ii) Unteres und oberes Riemann-Integral:

$$U(f) = \sup_Z U_Z(f) \,, \qquad O(f) = \inf_Z O_Z(f)$$

(iii) f Riemann-integrierbar $\iff$ $U(f) = O(f) \in \mathbb{R}$. Dann

$$\int_a^b dx\, f(x) = U(f) = O(f) = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} dx\, f(x)$$

Bemerkung 9.3

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ unbeschränkt $\implies$ $O_Z(f) = \infty$ oder $U_Z(f) = -\infty \quad \forall Z$

Riemann-integrierbare Funktionen sind also immer beschränkt

Lemma 9.4

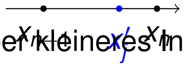
Z, Z' Zerlegungen von $[a,b] \implies U_Z(f) \leqslant O_{Z'}(f)$.

Somit $U(f) \leqslant O(f)$

Beweis: Behauptung klar für $Z = Z'$

Sei zunächst $Z \leqslant Z'$ und z.B. $x_{n-1} = x'_{j-1} < x'_j < x'_{j+1} = x_n$. Dann

$$\begin{aligned} \Delta x_n m_n &= \Delta x'_j m_n + \Delta x'_{j+1} m_n \\ &\leqslant \Delta x'_j m'_j + \Delta x'_{j+1} m'_{j+1} \quad \text{(weil inf über kleineres Intervall)} \end{aligned}$$



Somit $U_Z(f) \leqslant U_{Z'}(f)$. Analog: $O_Z(f) \geqslant O_{Z'}(f)$

Jetzt $Z \leqslant Z \cup Z'$ und $Z' \leqslant Z \cup Z'$, so dass

$$U_Z(f) \leqslant U_{Z \cup Z'}(f) \leqslant O_{Z \cup Z'}(f) \leqslant O_{Z'}(f)$$

$\square$

Satz 9.5 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

f integrierbar $\iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists$ *Zerlegung Z mit* $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$

Beweis: "$\Longrightarrow$" $O(f) = U(f) \implies Z, Z'$ mit $O_Z(f) - U_{Z'}(f) < \varepsilon$

$\implies O_{Z\cup Z'}(f) - U_{Z\cup Z'}(f) \leqslant O_Z(f) - U_{Z'}(f) < \varepsilon$ (Beweis Lemma 9.4)

"$\Longleftarrow$" $0 \leqslant O(f) - U(f) \leqslant O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$ für geeignetes Z $\square$

Satz 9.6 (Verschärftes Riemannkriterium)

f integrierbar

$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0$ *mit* $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon \;\forall\, Z$ *mit* $\mathcal{F}(Z) < \delta$

Beweis: (Argument f in O_Z, U_Z unterdrückt) "$\Longleftarrow$" klar nach Satz 9.5

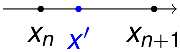
"$\Longrightarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 9.5 $\exists$ Zerlegung Z' mit $O_{Z'} - U_{Z'} < \frac{\varepsilon}{3}$

Sei Z beliebige Zerlegung.

Behauptung: $\exists$ von Z unabhängige Konstante $C = C(f, Z')$ mit

$$O_Z - O_{Z \cup Z'} \leqslant C\mathcal{F}(Z)\,, \qquad U_{Z \cup Z'} - U_Z \leqslant C\mathcal{F}(Z)$$

Begründung: Seien x_n, x_{n+1} in Z.



Betrachte zugehörigen Beitrag B_n zu $O_Z - O_{Z \cup Z'}$.

Falls kein Punkt von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, ist $B_n = 0$.

Falls ein Punkt x' von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, gilt:

$$\begin{aligned}
B_n &= (x_{n+1} - x_n) \sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - (x_{n+1} - x') \sup_{[x', x_{n+1}]} f - (x' - x_n) \sup_{[x_n, x']} f \\
&= (x_{n+1} - x') \left(\sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - \sup_{[x', x_{n+1}]} f \right) + (x' - x_n) \left(\sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - \sup_{[x_n, x']} f \right) \\
&\leqslant \mathcal{F}(Z) \left(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \right) \cdot 2
\end{aligned}$$

Falls k Punkte von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, gilt analog:

$$B_n \leqslant \mathcal{F}(Z) \left(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \right) (k+1)$$

Summieren über Beitrag zeigt $O_Z - O_{Z \cup Z'} \leqslant C\mathcal{F}(Z)$. Zweite Behauptung analog.
Somit

$$\begin{aligned} O_Z - U_Z &\leqslant |O_Z - O_{Z \cup Z'}| + |O_{Z \cup Z'} - U_{Z \cup Z'}| + |U_{Z \cup Z'} - U_Z| \\ &\leqslant C\mathcal{F}(Z) + \frac{\varepsilon}{3} + C\mathcal{F}(Z) < \varepsilon \end{aligned}$$

für $\mathcal{F}(Z) < \delta = \frac{\varepsilon}{3C}$. $\square$

Definition 9.7

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Z Zerlegung von $[a, b]$ mit Punkten $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$

Sei $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ Zwischenpunkte und setze $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$

Die zugehörige Riemannsche Zwischensumme ist definiert als

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \cdot f(\xi_n)$$

Satz 9.8 (Zwischensummenbeschreibung des Integrals)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann: $\int_a^b dx\, f(x) = I$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad \textit{mit}$$
$$|S_{Z,\xi}(f) - I| < \varepsilon\ \forall\ Z \textit{ mit } \mathcal{F}(Z) < \delta \textit{ und } \forall\ \xi$$

Beweis "$\Longrightarrow$" Es gilt

$$U_Z - O_Z \leqslant U_Z - I \leqslant S_{Z,\xi} - I \leqslant O_Z - I \leqslant O_Z - U_Z$$

Somit $|S_{Z,\xi} - I| \leqslant O_Z - U_Z < \varepsilon \quad \forall\, \mathcal{F}(Z) < \delta$ (nach Satz 9.6)

"$\Longleftarrow$" Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so, dass

$$|S_{Z,\xi} - I| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für } \mathcal{F}(Z) < \delta \quad \forall \text{ Zwischenpunkte } \xi$$

Bestimme ξ und ξ' so, dass

$$|S_{Z,\xi} - O_Z| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad |S_{Z,\xi'} - U_Z| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

Dann

$$O_Z - U_Z \leqslant |O_Z - S_{Z,\xi}| + |S_{Z,\xi} - I| + |S_{Z,\xi'} - I| + |S_{Z,\xi'} - U_Z| < \varepsilon$$

Schließe mit Satz 9.5 oder 9.6 $\square$

Korollar 9.9

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar*

$\Longrightarrow \int_a^b dx\, f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(a + \frac{n-t}{N}(b-a)\right) \quad \forall\, t \in [0, 1]$

Beweis: Spezielle Zwischensumme mit $\xi_n = a + \frac{n-t}{N}(b-a)$. □

Satz 9.10

Jede stetige Funktion ist (Riemann-) integrierbar

Beweis: Da $[a, b]$ kompakt, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig (Ana 1), d.h. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ \ \forall\, |x - x'| < \delta$

Für Zerlegung Z mit $\mathcal{F}(Z) < \delta$ gilt also

$$O_Z(f) - U_Z(f) \ < \ \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} \ = \ \varepsilon$$

Schließe mit Satz 9.6 □

Beispiel 9.11 (Berechnung eines Integrals)

$$\begin{aligned}
\int_a^b dx\, x^2 &= \lim_{N\to\infty} \tfrac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(a + \tfrac{n}{N}(b-a)\right)^2 \\
&= \lim_{N\to\infty} \tfrac{b-a}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(a^2 + n\tfrac{2}{N}(b-a)a + \tfrac{1}{N^2}(b-a)^2 n^2\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \tfrac{b-a}{N} \left(Na^2 + \tfrac{2(b-a)a}{N}\tfrac{N(N+1)}{2} + \tfrac{(b-a)^2}{N^2}\tfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) \\
&= (b-a)\left(a^2 + (b-a)a + \tfrac{1}{3}(b-a)^2\right) \\
&= (b-a)\tfrac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) \;=\; \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)
\end{aligned}$$

Länglich. Bessere Alternative später (Fundamentalsatz).

Definition 9.12

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *(Riemann'sche) Treppenfunktion*

$\iff$ $\exists$ Zerlegung Z von $[a,b]$ mit f konstant auf (x_{n-1}, x_n) $\forall$ n

Es gibt unstetige, integrierbare Funktionen:

Satz 9.13

Treppenfunktionen sind integrierbar

Begrndung: $O_Z(f) - U_Z(f)$ beliebig klein, denn Beitrag der endlich vielen Sprungstellen wird klein $\square$

Beispiel 9.14 (Eine nicht Riemann-integrierbare Funktion)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Dann $\forall$ Zerlegungen Z gilt $O_Z(f) = 1 > U_Z(f) = 0$

Aber: f Lebesgue-integrierbar und $\int_0^1 dx\, f(x) = 0$, weil $\mathbb{Q}$ "nur dünn", da abzählbar

Satz 9.15

(i) *Monotone Funktionen sind integrierbar*

(ii) *f, g integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \implies f + \lambda g$ und $f \cdot g$ integrierbar (d.h. integrierbare Funktionen bilden eine Algebra).*

(iii) *f integrierbar $\implies |f|$ integrierbar*

(iv) *f integrierbar, $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \implies h \circ f$ integrierbar*

Beweis: (i) Sei f monoton steigend. Dann

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \underbrace{(f(x_{n+1}) - f(x_n))}_{\geqslant 0} \\ &\leqslant \mathcal{F}(Z) \sum_{n=1}^{N} (f(x_{n+1}) - f(x_n)) \\ &= \mathcal{F}(Z)(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

Letzteres falls $\mathcal{F}(Z) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \delta$.

(ii) Sei $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}
O_Z(f+\lambda g) &= \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \sup_{[x_{n-1},x_n]} (f+\lambda g) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \left(\sup_{[x_{n-1},x_n]} f + \lambda \sup_{[x_{n-1},x_n]} g \right) \\
&= O_Z(f) + \lambda O_Z(g)
\end{aligned}$$

Analog $U_Z(f+\lambda g) \geqslant U_Z(f) + \lambda U_Z(g)$

Somit nach Satz 9.5

$$O_Z(f+\lambda g) - U_Z(f+\lambda g) \leqslant (O_Z(f) - U_Z(f)) + \lambda(O_Z(g) - U_Z(g)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda\varepsilon}{2}$$

Also ist $f + \lambda g$ integrierbar

Fall $\lambda < 0$ analog, als Übung.

Hilfsmittel lokale Variation $v_n(f) = \sup_{x,x' \in [x_{n-1},x_n]} |f(x) - f(x')|$. Dann:

$$O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n \sup_{x,x' \in [x_{n-1},x_n]} |f(x) - f(x')| = \sum_{n=1}^{N} \Delta x_n v_n(f)$$

Da

$$f(x)g(x) - f(x')g(x') = (f(x) - f(x'))g(x) + f(x')(g(x) - g(x'))$$

gilt

$$v_n(fg) \leqslant \|g\|_\infty v_n(f) + \|f\|_\infty v_n(g)$$

wobei

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Somit

$$O_Z(fg) - U_Z(fg) \leqslant \|g\|_\infty (O_Z(f) - U_Z(f)) + \|f\|_\infty (O_Z(g) - U_Z(g))$$

und fg integrierbar nach obigem Argument.

(iii) Variation erfüllt $v_n(|f|) \leqslant v_n(f)$. Dann wie in (ii).

(iv) h gleichmäßig stetig auf Kompaktum $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ (Analysis 1),

d.h. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ mit $|h(y) - h(y')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall\, |y - y'| < \delta$

Da f integrierbar, wähle Z mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \frac{\varepsilon \cdot \delta}{4\|h\|_\infty}$

Seien $\sum_n'$ und $\sum_n''$ Summen über Terme mit $v_n(f) < \delta$ bzw. $v_n(f) \geqslant \delta$

Dann $O_Z(f) - U_Z(f) \geqslant \delta \sum_n'' \Delta x_n$, und somit $\sum_n'' \Delta x_n < \frac{\varepsilon}{4\|h\|_\infty}$. Also

$$\begin{aligned} O_Z(h \circ f) - U_Z(h \circ f) &= \sum_{n=1}^{N}{}' \Delta x_n v_n(h \circ f) + \sum_{n=1}^{N}{}'' \Delta x_n v_n(h \circ f) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}{}' \Delta x_n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sum_{n=1}^{N}{}'' \Delta x_n 2\|h\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Jetzt: Aussagen für Ober- und Untersummen gelten für Integral:

Satz 9.16 (Rechenregeln fürs Integral)

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar,* $c \in (a, b)$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) *Linearität des Integrals:*

$$\int_a^b dx(f(x) + \lambda g(x)) = \left(\int_a^b dx\, f(x)\right) + \lambda \left(\int_a^b dx\, g(x)\right)$$

(ii) *Intervalladditivität:*

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^c dx\, f(x) + \int_c^b dx\, f(x)$$

(iii) *Monotonie:*

$$f(x) \leqslant g(x) \;\; \forall\, x \in [a, b] \implies \int_a^b dx\, f(x) \leqslant \int_a^b dx\, g(x)$$

(iv) *Standardabschätzung:*

$$\left|\int_a^b dx\, f(x)\right| \leqslant \int_a^b dx|f(x)| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$$

Satz 9.17

$(f_n)_{n\geqslant 1}$ *Folge integrierbare Funktionen auf* $[a,b]$
Folge konvergiere gleichmäßig gegen f *(d.h.* $\|f-f_n\|_\infty \to 0$*)*
$\Longrightarrow$ f *integrierbar und* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b dx\, f_n(x) = \int_a^b dx\, f(x)$
Entsprechendes gilt für gleichmäßig konvergente Reihen: $\sum_n \int = \int \sum_n$

Beweis:

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= (O_Z(f) - O_Z(f_n)) - (U_Z(f) - U_Z(f_n)) + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \\ &\leqslant O_Z(f-f_n) - U_Z(f-f_n) + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \text{ (wie oben)} \\ &\leqslant 2(b-a)\|f-f_n\|_\infty + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \end{aligned}$$

Wähle n mit $\|f-f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, dann Z mit $O_Z(f_n) - U_Z(f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$
Nach Riemannkriterium ist f also integrierbar. Mit Rechenregeln

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b dx\, f(x) - \int_a^b dx\, f_n(x)\right| &= \left|\int_a^b dx (f(x) - f_n(x))\right| \\ &\leqslant (b-a)\|f-f_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$\square$