12. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 12.1 (Lokale Extremstellen)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \cos(x)\cosh(y)$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - 3xy + 3y^2 - 2x + 5y - 4$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x^4 - y^2)(x-1)$

Präsenzaufgabe 12.2 (Implizite Funktionen)

In welchen Punkten $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ y^2 - z^2 &= 0 \end{aligned}$$

lokal auflösbar? Im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ kann das System lokal nach (y,z) aufgelöst werden. Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um die Ableitung der Auflösefunktion anzugeben.

Hausaufgabe 12.3 (Zweite Ableitung) (6 Punkte)

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ zusammen mit der Maximumsnorm

$$\|A\|_{\max} := \max_{1 \le i,j \le n} |A_{ij}| \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wir werden nun für eine fest gewählte Matrix $C \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ die folgende Funktion $f : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f(X) = \mathrm{Tr}(X^T C X)$ untersuchen.

(a) Berechnen Sie an jeder Stelle $X_0 \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ die Richtungsableitung der Funktion f in Richtung einer Matrix $H \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

(b) Zeigen Sie, dass f Frechét-differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung für jeden Punkt $X_0 \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ explizit als lineare Abbildung an.

(c) Zeigen Sie, dass auch f' Frechét-differenzierbar ist und bestimmen Sie $f''(Z_0)$ für jeden Punkt $Z_0 \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Geben Sie dann die zweite Ableitung explizit als eine Bilinearform an.

Hausaufgabe 12.4 (Kritische Punkte) (4 Punkte)

Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = 2\cos(z) + \sin(x)\sin(y)\,, \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \cos(x^2)\cos(y^2) \\ e^{x+y+z} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die kritischen Punkte von f und g.

Hausaufgabe 12.5 (Globale Extremstellen) (6 Punkte)

Bestimmmen Sie für die folgenden Funktionen alle *globalen* Extremstellen.

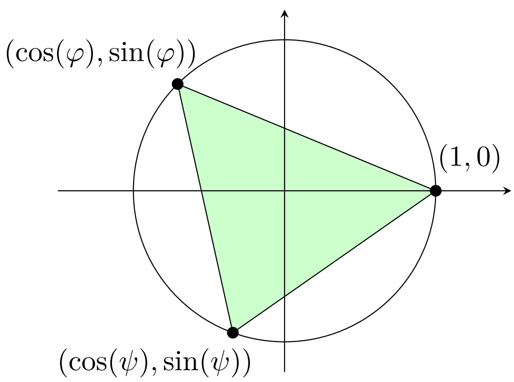
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \dfrac{(x^2-\frac{1}{4})^2+y^4}{1+x^4+y^4}$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y,z) = -8x + y + xy - y^2 - z^2 - 2x^4$

(c) $h : [-1,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = \dfrac{(x^2-1)y}{1+x^2+y^2}$

Hausaufgabe 12.6 (Maximieren des Flächeninhalts) (4 Punkte)

Wir schreiben innerhalb des Einheitskreises ein Dreieck ein. Dies kann durch zwei Winkelkoordinaten $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ auf folgende Weise geschehen:



Die analytische Geometrie lehrt uns, dass der (orientierte) Flächeninhalt dieses Dreiecks durch die Funktion

$$F(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\Big(\sin(\varphi) - \sin(\psi) + \sin(\psi-\varphi)\Big)$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion. Berechnen Sie dann die lokalen Maxima und Minima der Funktion und interpretieren Sie diese geometrisch.