11. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 11.1 (Partielle- versus Gâteaux-Differenzierbarkeit)

Betrachten Sie die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\,, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist. Zeigen Sie weiterhin, dass es einen nichtverschwindenden Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ und einen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ gibt, für welchen die Richtungsableitung

$$(\partial_v f)(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}$$

nicht existiert.

Präsenzaufgabe 11.2 (Taylorpolynom)

Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 3 für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\; f(x,y) = e^x \cos(\pi(x+2y)) + x + 1$$

an der Stelle $(1,-1)$.

Präsenzaufgabe 11.3 (Frechét- versus Gâteaux-Differenzierbarkeit)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}\,, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\,, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Geben Sie die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f total differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist.

(c) Weisen Sie nach, dass die Funktion f im Punkt $x_0 = (0,0)$ Gâteaux-differenzierbar ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $x_0 = (0,0)$ nicht stetig ist.

(e) Ist f im Punkt $x_0 = (0,0)$ total differenzierbar?

Hausaufgabe 11.4 (Kettenregel) (6 Punkte)

(a) Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ z \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ x-y \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad h(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ y^3 \\ xy \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel die Jacobi-Matrix von $f \circ h$ für jede Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie ebenso die Jacobi-Matrix von $f \circ g$ an der Stelle $(0,1) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Es seien differenzierbare Funktionen gegeben:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad y = (y_1, \dots, y_m) \mapsto g(y)$$

Zeigen Sie, dass die folgende Kettenregel für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Wie lautet im Fall $m = 1$ die Kettenregel für den Gradienten ∇?

Hausaufgabe 11.5 (Partielle Ableitungen) (7 Punkte)

Es seien Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ und dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ausgestattet ist. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktionen an jeder Stelle:

(a) $f_1(x,y) := x^3 - 2x^2y + xy^2 - 6xy^3 + y^4$.

(b) $f_2(x,y) := (x^2 + y^2)e^{xy}$.

(c) $f_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) := \|x\|$.

(d) $f_4(x,y) := \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

(e) $f_5(x,y,z) := x^{(y^z)}$.

(f) $f_6 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_6(x) := \langle a | x \rangle$ für festes $a \in \mathbb{R}^n$.

(g) $f_7 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_7(x) := e^{\langle a | x \rangle}$ für festes $a \in \mathbb{R}^n$.

Hausaufgabe 11.6 (Richtungsableitungen) (7 Punkte)

Es seien Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ und dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ausgestattet ist. Berechnen Sie die angegebenen Richtungsableitungen:

(a) $\partial_u f(x_0, y_0)$ für $u := (-2, 1)$ und $f(x,y) := ye^x$ für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\partial_u f(3,4)$ für $u := (-2,1)$ und $f(x,y) := x^y$;

(c) $\partial_v f(x_0, y_0, z_0)$ für $v := (-1, 1, -1)$ und $f(x,y,z) := xyz$ für $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

(d) $\partial_v f(x_0, y_0, z_0)$ für $v := (-1, 1, -1)$ und $f(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ für jeden Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(e) $\partial_w f(x_0)$ für $w \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) := \langle x|w\rangle$ für $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(f) $\partial_w f(x_0)$ für $w \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) := ||x||$ für $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(g) Betrachte nun $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ zusammen mit der Operatornorm. Berechnen Sie für die Determinantenabbildung $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Richtungsableitung in Richtung einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ an der Stelle der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$, d. h. $(\partial_A \det)(\mathbf{1})$.

Zusatzaufgabe 11.7 (Produktregel für Bilinearformen) (6 Bonuspunkte)

Es seien V ein reeller normierter Vektorraum und $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform (vgl. Aufgabe 5.7). Weiterhin gebe es ein $C > 0$ derart, dass für alle $u, v \in V$ gilt:

$$|B(u, v)| \leq C\|u\|\|v\| .$$

(a) Zeigen Sie, dass die quadratische Form

$$q : V \to \mathbb{R} , \ x \mapsto B(x, x)$$

differenzierbar ist und die folgende Ableitung hat:

$$q'(x_0) : V \to \mathbb{R} , \quad h \mapsto B(x_0, h) + B(h, x_0) .$$

(b) Es sei nun $\gamma : [0, 1] \to V$ eine differenzierbare Kurve in V. Zeigen Sie die folgende Regel:

$$\frac{d}{dt} B(\gamma(t), \gamma(t)) = B(\gamma(t), \gamma'(t)) + B(\gamma'(t), \gamma(t)) .$$

(c) Es seien nun $V = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm $\| \cdot \|$ und $B(u, v) = \langle u|v\rangle$ das euklidische Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ stets gilt:

$$\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2 = 2\langle\gamma(t)|\gamma'(t)\rangle$$

Folgern Sie, dass das Bild der Kurve γ genau dann auf einer Kugelsphäre um den Ursprung liegt, wenn $\gamma(t)$ und $\gamma'(t)$ für alle t orthogonal sind.