8. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 8.1 (Landau-Symbole)

Für $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ seien die Funktionen $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben. Weiterhin sei $x_0 \in [a, \infty]$. Man definiert die *Landau-Symbole* durch:

$$f = \mathcal{O}(g)\,, \quad (x \to x_0) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

$$f = o(g)\,, \quad (x \to x_0) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

Beachten Sie, dass die Gleichheitszeichen auf der linken Seite hier nur eine symbolische Bedeutung haben.

(a) Es seien nun $F, G, f, g, h : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit

$$F = \mathcal{O}(f)\,,\ G = \mathcal{O}(g)\,,\ h = o(f)\,, \quad (x \to x_0)$$

und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie nun die folgenden Rechenregeln:

(i) $F + G = \mathcal{O}(|f| + |g|)\,, \quad (x \to x_0)$

(ii) $F \cdot G = \mathcal{O}(f \cdot g)\,, \quad (x \to x_0)$

(iii) $cF + h = \mathcal{O}(f)\,, \quad (x \to x_0)$

(iv) $h \cdot G = o(f \cdot g)\,, \quad (x \to x_0)$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f = \mathcal{O}(x^{k+1})\,, \quad (x \to 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = o(x^k)\,, \quad (x \to 0)\,.$$

Hier schreiben wir x^k abkürzend für die Funktion $x \mapsto x^k$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(0) = 0$ gilt $f = o(1)\,, \quad (x \to 0)$.

(d) Für Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kann man die Definition der Landau-Symbole für $x_0 = \infty$ genauso verwenden. Beweisen oder widerlegen Sie nun:

(i) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\,, \quad (n \to \infty)$

(ii) $f = \mathcal{O}(n^n)\,, \quad (n \to \infty) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = \mathcal{O}(n!)\,, \quad (n \to \infty)$

Präsenzaufgabe 8.2 (Uneigentliche Riemann-Integrale)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des *Integralkriteriums* aus Satz 9.42, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert

(b) Finden Sie eine stetige unbeschränkte Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, deren uneigentliches Riemann-Integral

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

existiert.
Hinweis: Sie dürfen (a) verwenden und die Funktionsvorschrift nur als detaillierte Skizze präsentieren.

Präsenzaufgabe 8.3 (Topologien)

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir schreiben

$$\overline{A} := \{x \in X \mid x \text{ ist ein Berührpunkt von } A\}$$

und nennen dies den *Abschluss von A*.

(a) Bestimmen Sie alle Topologien auf der Menge $X = \{1, 2, 3\}$, für welche $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ offen sind.

(b) Bestimmen Sie auf $X = \{a, b, c, d\}$ die kleinste Topologie $\mathcal{O}$, die $\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}$ enthält. Berechnen Sie in diesem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ dann die Abschlüsse $\overline{\{b\}}$ und $\overline{\{a, b\}}$.

(c) Betrachten Sie die Menge $X = \{a, b, c, d, e\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O} := \Big\{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\Big\}.$$

Finden Sie eine Teilmenge von X, die weder offen noch abgeschlossen ist, und finden Sie eine echte Teilmenge $A \subsetneq X$, die $\overline{A} = X$ erfüllt.

(d) Betrachten Sie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammen mit der Topologie

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimmen Sie in diesem topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ den Abschluss $\overline{(0, 1)}$.

Hausaufgabe 8.4 (Uneigentliche Riemann-Integrale) (6+4 Punkte)

(a) Existieren die drei uneigentlichen Integrale? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte:

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\, dx, \qquad \int_0^e x \ln(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\cosh(x)}\, dx.$$

(b) Begründen Sie, warum das folgende uneigentliche Riemann-Integral existiert:

$$\int_0^\infty e^{-x} |\sin(x)|\, dx.$$

Verwenden Sie danach Ihr Wissen über die Nullstellen der Sinusfunktion, um das uneigentliche Integral zu berechnen.

Hausaufgabe 8.5 (Kugeln in metrischen Räumen) (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d) für ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$ gilt:

(a) $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ ist (metrisch) offen.

(b) $K_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist (metrisch) abgeschlossen.

(c) $S_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$ ist (metrisch) abgeschlossen.

Hinweis: Hier wird der Begriff „offen“ im metrischen Sinne verwendet, d. h. eine Teilmenge $A \subset X$ heißt (metrisch) offen, wenn für alle $a \in A$ ein Radius $r > 0$ derart existiert, dass die gesamte Kugel $B_r(a)$ innerhalb von A liegt. A heißt dagegen (metrisch) abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ (metrisch) offen ist.

Hausaufgabe 8.6 (Quotiententopologie) (5 Punkte)

(a) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge X. Wir bezeichnen mit $Y := X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und mit $\pi : X \to Y$ die kanonische Abbildung, d. h. $\pi(x) = [x]_\sim$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie nun, dass

$$\mathcal{O}_Y := \{U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X\}$$

eine Topologie auf Y definiert. Diese heißt die *Quotiententopologie auf Y*.

(b) Betrachten Sie das Intervall $X = [0, 2\pi]$ zusammen mit der Standardtopologie, bezeichnet mit $\mathcal{O}_X$. Wir betrachten nun die folgende Äquivalenzrelation $\sim$, definiert durch:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \Big(x = y \ \vee \ x, y \in \{0, 2\pi\}\Big).$$

Welcher topologische Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $Y = X/\sim$ und Quotiententopologie $\mathcal{O}_Y$ entsteht so aus dem topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$? Beschreiben Sie diesen „Entstehungsprozess“ anschaulich mit Hilfe von Skizzen.