3. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 3.1 (Gram-Schmidt)

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^4$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt. Führen Sie für die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt durch.

Präsenzaufgabe 3.2 (Skalarprodukt)

Es sei $C([-1,1],\mathbb{K})$ die Menge der $\mathbb{K}$-wertigen stetigen Funktionen auf $[-1,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass $C([-1,1],\mathbb{K})$ mit den Verknüpfungen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)\,, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)\,, \quad x \in [-1,1]\,,$$

für $f, g \in C([-1,1],\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, einen Vektorraum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{1} \overline{f(x)}g(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf $C([-1,1],\mathbb{K})$ definiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionen $u(x) := \cos(\pi x)$ und $v(x) := \sin(\pi x)$ bezüglich des obigen Skalarprodukts eine orthonormierte Familie bilden.

(d) Es sei U der von u aufgespannte eindimensionale Unterraum und V der von v aufgespannte eindimensionale Unterraum. Berechnen Sie jeweils die orthogonalen Projektionen von $p(x) = x^2$ auf U und V.

Präsenzaufgabe 3.3 (Unitäre Diagonalisierung)

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1-i \\ 0 & -i & 0 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

normal sind. Finden Sie unitäre Matrizen U, V derart, dass U^*AU und V^*BV diagonal sind.

bitte wenden

Hausaufgabe 3.4 (Legendre-Polynome) (4+4 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Polynom} \mid \deg(p) \leq 3\}$. Offensichtlich bildet $B_1 := (p_0, p_1, p_2, p_3)$ mit $p_i(x) = x^i$ (für $i = 0, 1, 2, 3$) eine Basis von V. Wir definieren nun das Skalarprodukt

$$\langle p|q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx$$

für $p, q \in V$.

(a) Bilden Sie ausgehend von B_1 und mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis B_2 von V.

(b) Stellen Sie $q(x) = x^2 + 1$ in der Basis B_2 dar.

Hausaufgabe 3.5 (Selbstadjungierte und unitäre Abbildungen) (6 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und es sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(T + T^*)$ und $\frac{1}{2i}(T - T^*)$ selbstadjungiert sind. Zeigen Sie außerdem, dass sich T als Summe einer selbstadjungierten und antiselbstadjungierten Abbildung darstellen lässt. *(Eine lineare Abbildung $S : V \to V$ heißt antiselbstadjungiert, wenn $S^* = -S$ gilt.)*

(b) Zeigen Sie, dass $TT^* := T \circ T^*$ selbstadjungiert ist und keine negativen Eigenwerte besitzt. Zeigen Sie weiterhin, dass $\mathbf{1}_V + TT^*$ nur positive Eigenwerte hat.

(c) Zeigen Sie, wenn T selbstadjungiert ist, dass $T + i\mathbf{1}_V$ und $T - i\mathbf{1}_V$ Isomorphismen sind und dass $(T + i\mathbf{1}_V)(T - i\mathbf{1}_V)^{-1}$ unitär ist.

Hausaufgabe 3.6 (Orthogonale Abbildung) (6 Punkte)

Es sei V ein N-dimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und $z \neq 0$ ein Vektor in V. Wir definieren die Abbildung:

$$T(v) := v - 2\frac{\langle z|v\rangle}{\langle z|z\rangle} z$$

für $v \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass T eine orthogonale Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass T selbstadjungiert ist.

(c) Zeigen Sie, dass $T \circ T = \mathbf{1}_V$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass T zwei verschiedene Eigenwerte hat, wobei einer die Vielfachheit 1 und der andere die Vielfachheit $(N - 1)$ besitzt.

(e) Warum nennt man die Abbildung eine Spiegelung?