Prof. Dr. Schulz-Baldes Julian Großmann

1. Übung zur Vorlesung

# Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

## Präsenzaufgabe 1.1 (Permutationen)

(a) Berechnen Sie die folgende Permutation:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie eine Permutation $\omega$ an, welche $\sigma \circ \omega = \tau$ für das obige $\sigma$ und für

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

## Präsenzaufgabe 1.2 (Determinante)

Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{K})$ mit den Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

definieren wir die Determinante:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{N} A_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_N} \mathrm{sgn}(\sigma)\, A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{N,\sigma(N)} \,.$$

Zeigen Sie nun, dass die transponierte Matrix $A$, bezeichnet mit $A^T$ und den Einträgen

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{N1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1N} & A_{2N} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix},$$

die gleiche Determinante wie $A$ besitzt.

## Präsenzaufgabe 1.3 (Volumenformen)

Es sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Wir betrachten nun eine alternierende $N$-lineare Abbildung für $N \in \mathbb{N}$:

$$\varphi : \mathbb{K}^N \times \cdots \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}, \quad (x_1, \ldots, x_N) \mapsto \varphi(x_1, \ldots, x_N)\,.$$

Dies bedeutet explizit, dass für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ die Abbildung

$$x_i \mapsto \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$$

eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}^N$ und $\mathbb{K}$ ist, und außerdem, dass

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) = 0\,,$$

falls $x_i = x_j$ für zwei unterschiedliche $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ gilt.
Zeigen Sie nun ausgehend von diesen Eigenschaften:

(a) Für $i \neq j$ gilt

$$\varphi(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i + a x_j, x_{i+1} \ldots, x_j, \ldots, x_N) = \varphi(x_1, \ldots, x_N)$$

für alle $a \in \mathbb{K}$.

(b) Für eine beliebige Permutation $\sigma \in S_N$ gilt:

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_N)\,.$$

(c) Es gilt

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \det(B(x)) \cdot \varphi(e_1, \ldots, e_N)\,,$$

wobei $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)^T$ mit der Eins an der $j$-ten Stelle und die Matrix $B(x)$ durch

$$B(x) := (x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

gegeben ist.

## Präsenzaufgabe 1.4 (Regel von Sarrus)

Gegeben sei die $3 \times 3$-Matrix $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie die *Regel von Sarrus*:

$$\det(A) = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{21}A_{32}A_{13} + A_{31}A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{23}A_{32}A_{11} - A_{33}A_{12}A_{21}.$$

Überprüfen Sie nun den folgenden Ausdruck für das *Spatprodukt*: Für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ sei $A$ die Matrix mit $x, y, z$ als Spalten. Dann gilt

$$(x \times y) \cdot z = \det(A)\,,$$

wobei $\cdot$ das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren bezeichnet.

## Hausaufgabe 1.5 (Permutationen) (6 Punkte)

Es seien $\sigma, \tau \in S_5$ gegeben durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\sigma^{-1}$ sowie jeweils die Anzahl der Fehlstände $L(\sigma), L(\tau)$ und das Vorzeichen $\operatorname{sgn}(\sigma), \operatorname{sgn}(\tau)$. Schreiben Sie $\sigma$ und $\tau$ jeweils als Produkt von Transpositionen.

**Hausaufgabe 1.6 (Determinanten)** (6 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

(a)
$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{für } \varphi \in \mathbb{R}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{K}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{4} \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(e)
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(f) Beweisen Sie:
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

**Hausaufgabe 1.7 (Determinante)** (6+2=8 Punkte)

(a) Es sei $A$ eine sogenannte Blockmatrix von der Form
$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
mit quadratischen Matrizen $B$ und $D$. Zeigen Sie, dass dann $\det(A) = \det(B)\det(D)$ gilt.

(b) Zeigen Sie durch ein passendes Gegenbeispiel, dass
$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$
im Allgemeinen falsch ist.

---

Abgabe bis Dienstag, dem 19.04.2016 um 10:59 Uhr.