Funktionentheorie – Komplexe Differenzierbarkeit

Themen des Tutoriums am 17.06.2015 sind eine komplette Wiederholung:

- Eine auf den komplexen Zahlen definierte Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar an der Stelle* $z \in D$, wenn

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} , \quad \text{mit } h \in \mathbb{C} ,$$

  existiert.

- Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$ in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar, so kann man die Funktion

$$f' : D \to \mathbb{C} , \quad z \mapsto f'(z)$$

  bilden. Wir nennen f dann eine *holomorphe Funktion* und bezeichnen f' als *die Ableitung von* f.

- Jede komplexe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ kann man darstellen als

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) ,$$

  wobei u und v reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ sind.

- **Satz:** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn u und v stetig partiell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

  Die Ableitung kann dann als $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$ berechnet werden.

- Potenzreihen in der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^k$$

  stellen auf Ihrem Konvergenzgebiet holomorphe Funktionen dar.

Hinweis: Ich verwende i *für die imaginäre Einheit und* $\overline{z}$ *für die komplexe Konjugation.*

Aufgabe 41

Untersuche die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf Holomorphie:

(a) $f(z) = 1$

(b) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

(c) $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y)$ für eine reelle Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Welche Bedingung muss für u gelten, damit f holomorph ist?

Aufgabe 42

(a) Gegeben sei eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit dem Realteil $u(x, y) = x - y$. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für den Imaginärteil v.

(b) Kann die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^2 - 3x + y^2$ Realteil einer holomorphen Funktion sein?

(c) Kann die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^2 - 3x - y^2$ Realteil einer holomorphen Funktion sein?

Aufgabe 43

Bestimme alle Punkte, in denen die folgende Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist:

$$\text{(a)}\ \ f(z) = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z)\,, \quad \text{(b)}\ \ f(z) = \overline{z}^3\,.$$

Auf welchem Bereich sind die Funktionen holomorph?

Aufgabe 44

Wir definieren die komplexe Exponentialfunktion auf der komplexen Ebene als:

$$\exp(z) = e^z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,, \qquad \text{für } z = x + \mathrm{i}y\,.$$

Zeigen Sie, dass diese holomorph ist und berechnen Sie Ableitung.

Aufgabe 45

Betrachten Sie den Sinus $f(z) = \sin(z) := \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z})$ auf $\mathbb{C}$.

(a) Bestimme den Realteil $u(x, y)$ und den Imaginärteil $v(x, y)$ von $\sin(x + \mathrm{i}y)$. Verwenden Sie dazu die Funktionen $\cosh$ und $\sinh$.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von u und v.

(c) Ist f holomorph? Falls ja, wie lautet die Ableitung?

Lösungen

Auf den folgenden Seiten findet ihr meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 41
- Lösung zur Aufgabe 42
- Lösung zur Aufgabe 43

- Lösung zur Aufgabe 44
- Lösung zur Aufgabe 45

Aufgabe 41

(a) $f(z) = 1$,

C.R. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$ ✓

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ✓

Ableitungen sind alle stetig $\Rightarrow$ f holomorph.

(b) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $f(x+iy) = x$

C.R.: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$

C.R. ist nicht erfüllt $\Rightarrow$ f nicht holomorph.

(c)

Wenn $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot 0$ gilt, so sagen die C.R. DGLn:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Dies bedeutet, dass <u>u konstant</u> sein muss!

Aufgabe 42

(a) C.R. DGLn lauten:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(2) \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = 1 = \frac{\partial v}{\partial x} .$$

Es folgt:

$$(1) \Rightarrow v(x,y) = y + C(x) \qquad (a)$$

$$(2) \Rightarrow v(x,y) = x + D(y) \qquad (b)$$

Setzen wir (a) in (2) ein erhalten wir:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \Rightarrow C'(x) = 1 \quad \Rightarrow C(x) = x + \text{const.}$$

Mit (b) läuft es analog.

Wir erhalten: $\underline{v(x,y) = x + y + \text{const.}}$

(b) Verwende Aufgabe 38 ($\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$ <u>Nicht</u> Realteil einer holom. Fkt.

(c) Analog: $\Delta u = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$ <u>Realteil</u> einer holom. Fkt.

(Wähle z.B $v = 2xy - 3y$ als Imaginärteil analog zu (a))

Aufgabe 43

(a) $f(x+iy) = y \cdot x$

C.R. $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = y \;=\; x = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \;=\; -y \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Nur in $x = y = 0$ erfüllt.

Begründung angeben! (*)

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{Re}(h)\,\mathrm{Im}(h)}{h} = \underline{0}$$

$$\left((*) \quad \left| \frac{\mathrm{Re}(h)\,\mathrm{Im}(h)}{h} \right| \le \frac{|h| \cdot |h|}{|h|} = |h| \longrightarrow 0 \right)$$

(b) $f(x+iy) = (x-iy)^3 = (x^2 - 2xy \cdot i - y^2)(x - iy)$

$$= x^3 - 2x^2 y \cdot i - y^2 x - i x^2 y + i^2 2xy^2 + iy^3$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2 y)$$

C.R. $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \;=\; 3y^2 - 3x^2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \;=\; 6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Nur für $x = y = 0$ erfüllt.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}^3}{h} = \underline{0}$$

Aufgabe 44

$f(z) = e^z$

C.R. $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) = e^x \cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y}$ ✓

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y) = -e^x \sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ✓

Da u, v stetig differenzierbar sind, ist f holomorph.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^x \cos(y) + i\, e^x \sin(y)$$

$$= e^x \left(\cos(y) + i \sin(y) \right)$$

$$= e^{x+iy} = \underline{e^z}$$

Aufgabe 45

(a) $f(x+iy) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}e^{-y} - e^{y}e^{-ix}\right)$

$$= \dots = \underbrace{\sin(x)\cosh(y)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\cos(x)\sinh(y)}_{v(x,y)}$$

(b)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x)\cosh(y) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos(x)\cosh(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x)\sinh(y) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin(x)\sinh(y)$$

(c) f ist holomorph, da u, v stetig differenzierbar sind und die C.R. DGLn erfüllt sind.

$$f'(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$= \underline{\cos(z)} \qquad \underline{(\text{vgl. Aufgabe } 40)}$$