Funktionentheorie – Komplexe Differenzierbarkeit

Themen des Tutoriums am 10.06.2015:

- Eine auf den komplexen Zahlen definierte Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar an der Stelle* $z \in D$, wenn

$$f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}\,, \quad \text{mit } h \in \mathbb{C}\,,$$

  existiert.

- Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$ in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar, so kann man die Funktion

$$f' : D \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto f'(z)$$

  bilden. Wir nennen f dann eine *holomorphe Funktion* und bezeichnen f' als *die Ableitung von* f.

- Jede komplexe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ kann man darstellen als

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)\,,$$

  wobei u und v reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ sind.

- **Satz:** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn u und v stetig partiell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

- Potenzreihen in der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$$

  stellen auf Ihrem Konvergenzgebiet holomorphe Funktionen dar.

Hinweis: Ich verwende i *für die imaginäre Einheit und* $\overline{z}$ *für die komplexe Konjugation.*

Aufgabe 35

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) := \begin{cases} z & \text{für } |z| \neq 1 \\ 1 & \text{für } |z| = 1 \end{cases}\,.$$

in $z = 1$ nicht komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 36

Sind die folgende Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph?

(a) $f(z) = z^2$, (b) $f(z) = \cos(z)$, (c) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$, (d) $f(z) = \overline{z}$.

Aufgabe 37

Bestimme alle Punkte, in denen die folgende Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist:

(a) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$, (b) $f(z) = z\overline{z}$.

Aufgabe 38

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion dargestellt als

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) ,$$

wobei u, v zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktionen sind. Zeigen Sie, dass u und v harmonische Funktionen in D sind, d. h.

$$\Delta u = \Delta v = 0 .$$

Hier ist Δ der Laplace-Operator in zwei Dimensionen.

Aufgabe 39

Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Holomorphie:

(a) $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \mathrm{Re}\,(z)^2 - 2\mathrm{Re}\,(z)\mathrm{Im}\,(z)^3 + \mathrm{i}(2\mathrm{Re}\,(z)^3\mathrm{Im}\,(z) - \mathrm{Im}\,(z)^2)$.

Aufgabe 40

Betrachten Sie den Kosinus $f(z) = \cos(z)$ auf $\mathbb{C}$.

(a) Bestimme den Realteil $u(x, y)$ und den Imaginärteil $v(x, y)$ von $\cos(x + \mathrm{i}y)$. Verwenden Sie dazu die Funktionen $\cosh$ und $\sinh$.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von u und v.

(c) Ist f holomorph? Falls ja, wie lautet die Ableitung?

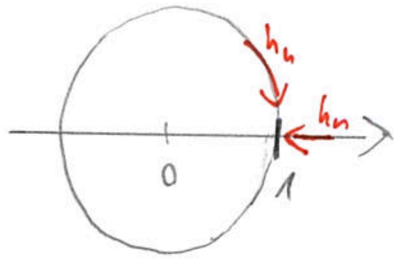
Lösungen

Auf den folgenden Seiten findet ihr meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 35
- Lösung zur Aufgabe 36
- Lösung zur Aufgabe 37 und 38
- Lösung zur Aufgabe 39
- Lösung zur Aufgabe 40

Aufgabe 35

Betrachte:



$$\frac{f(z+h) - \overbrace{f(z)}^{=1}}{h} =: D_h$$

1. Möglichkeit: Wähle $h \to 0$ als $h_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$D_{h_n} = \frac{f(1+\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{1+\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \underline{1}$$

Also $\lim\limits_{n\to\infty} D_{h_n} = 1$

2. Möglichkeit: Wähle $h \to 0$ als $h_n = e^{i\frac{1}{n}} - 1$

$$D_{h_n} = \frac{f(1+e^{i\frac{1}{n}}-1) - 1}{e^{i\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\overbrace{f(e^{i\frac{1}{n}})}^{=1} - 1}{e^{i\frac{1}{n}} - 1} = \underline{0}$$

Also $\lim\limits_{n\to\infty} D_{h_n} = 0$

Unterschiedliche Grenzwerte $\Rightarrow$ <u>$f'(1)$ existiert nicht!</u>

Aufgabe 36

Alle sind reell stetig differenzierbar. Es bleibt also nur zu zeigen, dass C.R.-DGLn erfüllt sind:

(a) $f(z) = (x+iy)^2$ mit $z = x+iy$

$$= x^2 + 2iyx - y^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\underbrace{(2xy)}_{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \checkmark \Rightarrow \text{holomorph}$$

(b) $f(z) = \cos(z) =$ Potenzreihe mit Konvergenzbereich $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ holomorph

(c) $f(z) = f(x+iy) = \mathrm{Im}(x+iy) = y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \neq 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \text{nicht holomorph}$$

(d) $f(x+iy) = \overline{(x+iy)} = x - iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \text{nicht holomorph}$$

Aufgabe 37

(a) $f(x+iy) = x^2 + ixy$ (stetig partiell diff'bar)

C.R.: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \overset{?}{=} x = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \overset{?}{=} -y = -\frac{\partial v}{\partial x}$

C.R. ist nur für $x=y=0$ erfüllt.

Deswegen ist f nur in der Null komplex diff'bar mit Ableitung:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h \operatorname{Re}(h)}{h} = \underline{0}$$

(b) $f(x+iy) = x^2+y^2 + i \cdot 0$ (stetig partiell diff'bar)

C.R.: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \overset{?}{=} 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \overset{?}{=} 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$

C.R. ist nur für $x=y=0$ erfüllt, so dass f nur dort komplex diff'bar ist.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \overline{h} = \underline{0}$$

Aufgabe 38

Verwende Satz von Schwarz!

Aufgabe 39

(a) $$f(x+iy) = \frac{1}{1-x-iy} \cdot \frac{(1-x+iy)}{(1-x+iy)}$$

$$= \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} + i \frac{y}{(1-x)^2+y^2}$$

C.R. überprüfen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{[(1-x)^2+y^2](-1) - (1-x)\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{\underbrace{[(1-x)^2+y^2]}_{N_{x,y}}{}^2}$$

$$= \frac{-(1-x)^2 - y^2 + 2(1-x)^2}{N_{x,y}^2} = \frac{(1-x)^2 - y^2}{N_{x,y}^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{[(1-x)^2+y^2] - y\cdot 2y}{N_{x,y}^2} = \frac{(1-x)^2 - y^2}{N_{x,y}^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(-1)\cdot 2y \cdot (1-x)}{N_{x,y}^2} = \frac{-2(1-x)y}{N_{x,y}^2}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2(1-x)\cdot y}{N_{x,y}^2} = \frac{-2(1-x)\cdot y}{N_{x,y}^2}$$

C.R. DGLn sind erfüllt $\Rightarrow$ f holomorph.

39 (b)

$$f(x+iy) = x^2 - 2xy^3 + i(2x^3y - y^2)$$

C.R. überprüfen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y^3 \overset{?}{=} 2x^3 - 2y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ Nicht erfüllt auf ganz $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Nicht holomorph!

Aufgabe 40

(a) $$f(x+iy) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}\right)$$

$$= \cdots = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$u(x,y) = \cos(x)\cosh(y)$$
$$v(x,y) = -\sin(x)\sinh(y)$$

(b) $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x)\cosh(y) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin(x)\cosh(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x)\sinh(y) \quad , \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = \cos(x)\sinh(y)$$

(c) f ist holomorph, da u und v stetig differenzierbar sind und die C.R. DGLn erfüllt sind.

$$f'(z) = -\sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\cdot\sinh(y)$$

$$\left[f'(x+iy) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

Es gilt $f'(z) = -\sin(z)$ (überprüfen!)