Vektoranalysis –Orientierte Flächenintegrale, Satz von Gauß, Satz von Stokes

Themen des Tutoriums am 03.06.2015:

- Wiederholung: Ein *glattes Flächenstück* ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$, die eine reguläre Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ hat:
  - $U \subset \mathbb{R}^2$ ist offen,
  - φ bildet U bijektiv auf M ab,
  - φ ist stetig differenzierbar mit

    $$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \neq \vec{0}$$

    für alle $(u,v) \in U$.

- Für ein glattes Flächenstück M mit Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ und ein Vektorfeld $\vec{v} : M \to \mathbb{R}^3$ definiert man das *Oberflächenintegral von $\vec{v}$ über M* als

  $$\int_M \vec{v} \bullet \, d\vec{\sigma} := \iint_U \vec{v}(\varphi(u,v)) \bullet \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right) d(u,v) \, .$$

  Bemerkung: Anstatt $d\vec{\sigma}$ sieht man auch oft $d\vec{A}$ oder $d\vec{S}$ als Notation für das Oberflächenintegral. Man spricht auch häufig von einem orientiertem Oberflächenintegral oder dem Fluss von $\vec{v}$ durch die Fläche M.

- Falls man einen *normierten* Normalenvektor $\vec{n}$ an jedem Punkt der Fläche angeben kann, so gilt der folgende Zusammenhang:

  $$\int_M \vec{v} \bullet \, d\vec{\sigma} = \int_M \vec{v} \bullet \vec{n} \, d\sigma \, .$$

  Oft kann man so das zu integrierende Feld $\vec{v} \bullet \vec{n}$ schon sehr vereinfachen, sodass man das Integral direkt lösen kann.

- Wichtigsten Sätze in Verbindung mit dem Oberflächenintegral sind der Satz von Gauß und der Satz von Stokes. In einem gewissen Sinne verallgemeinern diese den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

  $$\int_a^b f'(t) \, dt = f(a) - f(b) \, .$$

Satz von Gauß. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge, deren Rand ∂G eine glatte Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist. Die Parametrisierungen $\varphi : U \to \partial G$ seien so gewählt, dass der Normalenvektor immer nach außen zeigt, d. h. folgt man dem Normalenvektor, so landet man außerhalb von G. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\int_G \operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) \, d^3(x,y,z) = \int_{\partial G} \vec{v} \bullet d\vec{\sigma} \, .$$

Satz von Stokes. Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte berandete Fläche , deren Rand ∂S eine geschlossene Kurve ist. Die Parametrisierungen $\varphi : U \to S$ seien so gewählt, dass alle Normalenvektoren auf der gleichen Seite der Fläche liegen. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \bullet \, d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} \vec{v} \bullet d\vec{s} \, ,$$

wobei die Kurve ∂S gemäß der Rechten-Hand-Regel durchlaufen wird.

Aufgabe 27

Parametrisieren Sie die Kugeloberfläche mit Radius $R > 0$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten (vgl. Aufgabe 18) und berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \, , \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

durch diese Fläche.

Aufgabe 28

Überprüfen Sie den Satz von Gauß für die Kugel mit Radius $R > 0$ in $\mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld

$$\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \, , \quad \vec{w}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; .$$

Aufgabe 29

Es sei F die Oberfläche des Körpers, der von den Flächen $y = 1 + x^2$, $y = 2$, $z = 0$ und $z = 5$ begrenzt wird. Skizzieren Sie F und berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{u}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} 4x^2 - 2yz \\ x - 2y \frac{1}{\cos^2(z)} \\ 3y + 2\tan(z) - 3xz \end{pmatrix}$$

das Oberflächenintegral

$$\int_F \vec{u} \bullet d\vec{\sigma} \; .$$

Aufgabe 30

Skizzieren Sie die Menge $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4\,,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Beschreiben Sie diese Menge auch in Worten. Berechnen Sie dann mit Hilfe des Satzes von Gauß das Volumenintegral

$$\int_G \operatorname{div} \vec{v}(x, y, z)\, d^3(x, y, z)$$

wobei $\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, (\pi + xy)\sin(1 - z^4))$.

Aufgabe 31

Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{s}\,,$$

wobei $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{1+x^2} - y, \cos(y^2) + x, \ln(1 + z^2)\right)$ gilt und die parametrisierte Kurve $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), 0)$ für ein $r > 0$ erfüllt.

Aufgabe 32

Skizzieren Sie Fläche $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,\ z \geq 3\}$ und berechnen Sie für

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{x}{2}z^2 \\ x \end{pmatrix}$$

das Oberflächenintegral

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{u} \bullet d\vec{\sigma}\ .$$

Hinweis: Suchen Sie eine einfachere Fläche, die den gleichen Rand wie A hat und argumentieren Sie mit dem Satz von Stokes.

Aufgabe 33

Betrachten Sie die berandete Fläche S, die durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4\,, \quad z \geq 0$$

gegeben ist. Skizzieren Sie diese und erklären Sie wo sich der Rand ∂S befindet. Berechnen Sie dann mit Hilfe des Satzes von Stokes das folgende Kurvenintegral

$$\int_{\partial S} \vec{v} \bullet d\vec{s}, \quad \text{mit } \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}\ .$$

Aufgabe 34

Betrachten Sie die berandete Fläche S, die durch die Gleichungen

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 8\,, \quad z \geq 0$$

gegeben ist. Skizzieren Sie diese und erklären Sie wo sich der Rand ∂S befindet. Berechnen mit einer Methode Ihrer Wahl das folgende Oberflächenintegral

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \bullet d\vec{\sigma}\,, \quad \text{mit } \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$

Lösungen

Auf den folgenden Seiten finden Sie meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 27
- Lösung zur Aufgabe 28
- Lösung zur Aufgabe 29
- Lösung zur Aufgabe 30
- Lösung zur Aufgabe 31
- Lösung zur Aufgabe 32
- Lösung zur Aufgabe 33
- Lösung zur Aufgabe 34

Aufgabe 27

$$\Phi(\varphi,\theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

parametrisiert die Kugel mit Radius R. (Kugeloberfläche!)
Wir berechnen das Oberflächenintegral:

$$\int_{S_R} \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_U \vec{V}(\Phi(\varphi,\theta)) \cdot R^2 \sin(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} d^2(\varphi,\theta)$$

(s. Aufgabe 18)

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} R^3 \sin(\theta) \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{=1} d\theta \right) d\varphi$$

gleicher Vektor und Betrag ist 1 ($\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$)

$$= R \cdot \iint_U R^2 \sin(\theta) \, d^2(\varphi,\theta)$$

$$= R \cdot \int_{S_R} d\sigma = R \cdot 4\pi R^2$$

$$= \underline{4\pi R^3}$$

[oder kürzer: $\int_{S_R} \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{S_R} R \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = R \cdot \int_{S_R} d\sigma = 4\pi R^3$]

normierter Normalenvektor

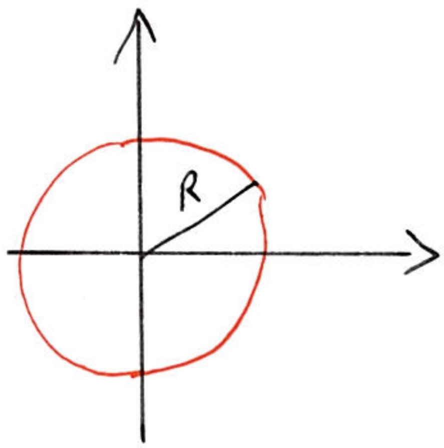
Aufgabe 28

Satz von Gauß:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{w})\, d^3V = \oint_{\partial V} \vec{w} \cdot d^2\vec{A}$$

Nun ist $\vec{w}(x,y,z) = \vec{x} \cdot \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

und V die Kugel mit Radius R.



Die linke Seite:

Die Divergenz:

$$\operatorname{div}(\vec{w}) = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \qquad , \left(\sqrt{\cdots} := \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right)$$

$$= \left(\sqrt{\cdots} + \frac{x^2}{\sqrt{\cdots}} \right) + \left(\sqrt{\cdots} + \frac{y^2}{\sqrt{\cdots}} \right) + \left(\sqrt{\cdots} + \frac{z^2}{\sqrt{\cdots}} \right)$$

$$= 3\sqrt{\cdots} + \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{\cdots}} = 4 \cdot \sqrt{\cdots} = \underline{4 \cdot \|\vec{x}\|}$$

Das Volumenintegral

Verwende Kugelkoordinaten $\Phi(r,\varphi,\theta) = r \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{w})\, d^3V = \int_{V=\Phi(A)} 4 \cdot \|\vec{x}\|\, d(x,y,z)$$

$$= \int_A 4 \cdot r \cdot \underbrace{|\det J_\Phi(r,\varphi,\theta)|}_{\text{(nachrechnen!)}}\, d(r,\varphi,\theta) \qquad A := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} r\in[0,R] \\ \varphi\in[0,2\pi] \\ \theta\in[0,\pi] \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} 4r \cdot (r^2 \sin\theta)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^R 4r^3 \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \right)}_{2 \text{ (merken!)}} dr$$

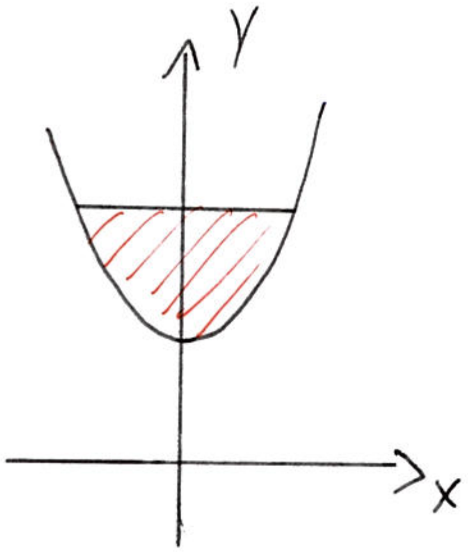
$$= \underline{4\pi \cdot R^4}$$

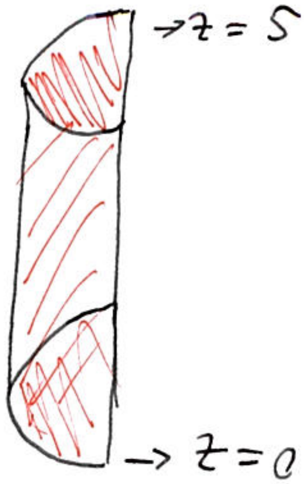
Rechte Seite:

$$\oint_{\partial V} \vec{w} \cdot d^2\vec{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{w}(\Phi(\varphi,\theta)) \cdot \vec{N}(\varphi,\theta)\, d\varphi\, d\theta \qquad \text{(siehe Übung!)}$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \cdot \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cdot\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\vec{x}/R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\vec{x}/R}}_{1} R^2 \cdot \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \underline{4\pi R^4}$$

Aufgabe 29





$$I = \int_F \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

$$\left(= \int_F \vec{u} \cdot d\vec{A} \right)$$

Oberflächenintegral!

Satz von Gauß ist anwendbar und bringt dies auf ein Volumenintegral:

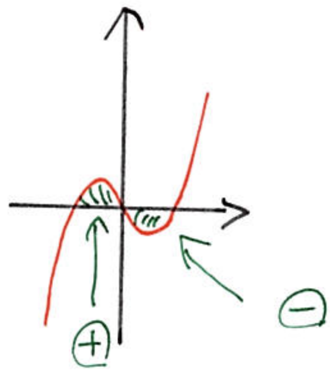
$$I = \int_V \operatorname{div}(\vec{u}) \, d^3V \qquad \text{mit} \quad \operatorname{div}\vec{u} = 8x - \frac{2}{\cos^2 z} + \frac{2}{\cos^2 z} - 3x$$

$$= \underline{5x}$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{5} \left(\int_{1+x^2}^{2} 5x \, dy \right) dz \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{5} \left(\left(2 - (1+x^2)\right) \cdot 5x \right) dz \right) dx$$

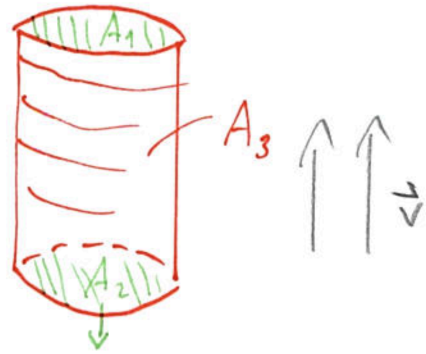
$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{4 \cdot \left(10x - 5x + 5x^3\right)}_{\text{ungerade Funktion}} dx$$



$$= \underline{0}$$

Aufgabe 30

$$\int_G \operatorname{div} \vec{v}(x,y,z)\, d^3(x,y,z)$$



$$\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= \int_{A_1} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} + \int_{A_2} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} + \underbrace{\int_{A_3} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}}_{=0}$$

(Das Vektorfeld steht senkrecht zum Normalenvekto $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$)

$$= \int_{A_2} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} + \underbrace{\int_{A_1} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}}_{=0}$$

(Für $z = 1$ ist das Vektorfeld immer $\vec{0}$, so dass auch das Integral verschwindet)

$$= \iint_U \vec{v}(\varphi(u,v)) \cdot \underbrace{\vec{N}(u,v)}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \, d^2(u,v)$$

(siehe Skizze!)

für eine Parametrisierung $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ der Bodenfläche.

Wähle $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

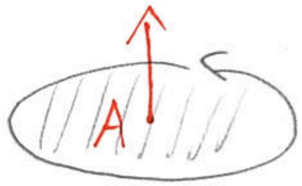
mit $U = \left\{ \begin{matrix} x \in [-2,2] \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{matrix} \right\}$

$$= -\sin(1) \cdot \iint_U (\pi + xy)\, d^2(x,y)$$

$$= \underline{-4\pi^2 \sin(1)}$$

Aufgabe 31

Die Kurve γ schließt eine Fläche ein:



Der Normalenvektor nach der Rechten-Handregel lautet an jedem Punkt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann ergibt sich:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= \int_A \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

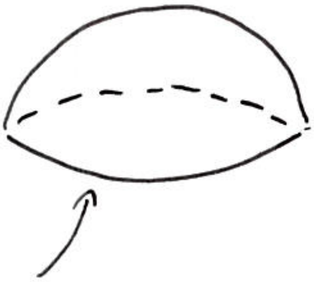
$$= \int_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\sigma$$

$$= 2 \underbrace{\int_A d\sigma}_{\text{Flächeninhalt}}$$

$$= \underline{2\pi r^2}$$

Aufgabe 32

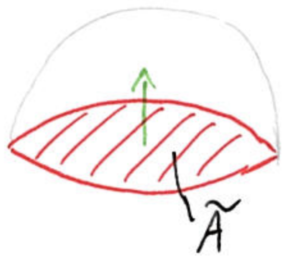
$$\vec{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{x}{2} z^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 3 \right\}$$

$A =$  Fläche von Kugelkappe

∂A untere Kreis

$$I = \int_A \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot d^2\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad \text{(nach Stokes)}$$

$$= \int_{\tilde{A}} \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot d^2\vec{A} \quad \text{(nach Stokes)}$$



ebene Fläche

$$= \int_{\tilde{A}} \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot \vec{n}\, d^2A$$

normierter Normalenvektor

Der Satz von Stokes erlaubt also anstatt die gekrümmte Kugelkappe einfach den ebenen Kreis $\tilde{A}$ zu integrieren.

$$\operatorname{rot}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{x}{2} z^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - xz \\ 0 - 1 \\ \frac{1}{2} z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xz \\ -1 \\ \frac{1}{2} z^2 \end{pmatrix}$$

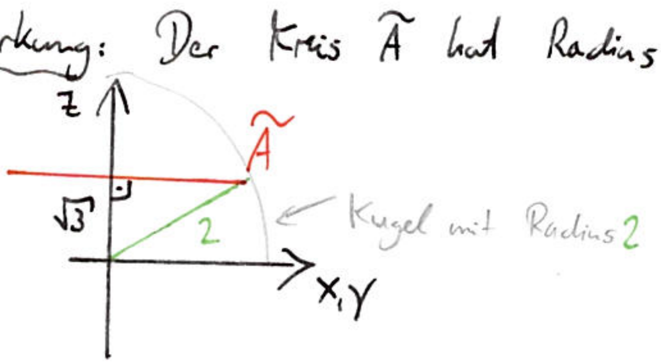
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$, denn die Fläche ist eben und parallel zur x-y-Ebene.

<u>Demnach:</u>

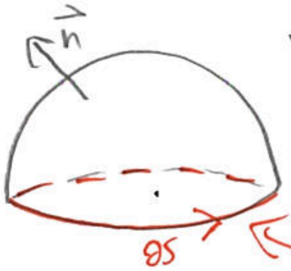
$$I = \int_{\tilde{A}} \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot \vec{n} \, d^2A = \int_{\tilde{A}} \underbrace{\frac{1}{2} z^2}_{z = \sqrt{3} \text{ auf } \tilde{A}} \, d^2A$$

$$= \frac{3}{2} \int_{\tilde{A}} d^2A = \frac{3}{2} \underbrace{\operatorname{vol}_2(\tilde{A})}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{des Kreises.}}} = \underline{\frac{3}{2} \cdot \pi}$$

<u>Zusatzbemerkung:</u> Der Kreis $\tilde{A}$ hat Radius 1, denn:



Aufgabe 33



Halbkugel!

Rand S mit Durchlaufrichtung

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= \int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma \qquad \text{mit } \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \vec{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \int_S \frac{1}{2} 3y^2 z \, d\sigma$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} 4 \cdot \sin^2\theta \sin^2\varphi \cdot 2\cos\theta \cdot 4 \cdot \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \pi \cdot \int_0^{\pi/2} 32 \cdot \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta$$

(Kugelkoordinaten wählen!)

$$= 3 \cdot 16 \pi \cdot \left[\frac{1}{4} \sin^4\theta \right]_0^{\pi/2} = 12\pi \cdot 1$$

$$= \underline{12\pi}$$

Aufgabe 34

Ein halber Ellipsoid:

$\Leftarrow \partial S = \{(x,y,z) \mid z=0,\ x^2+y^2 = 2$

Der Rand ist parametrisiert durch eine übliche Kreisparametrisierung:

$$\gamma(t) = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix},$$

mit $$\dot{\gamma}(t) = \sqrt{2}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_{\partial S}\vec{V}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{V}\cdot d\vec{s}$$

$$= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\sin(t)\\ -\sqrt{2}\cos(t)\\ \sqrt{2}\,(\cos(t)-\sin(t))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin(t)\\ \sqrt{2}\cos(t)\\ 0\end{pmatrix} dt$$

$$= -\sqrt{2}^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right)dt$$

$$= \underline{-4\pi}$$