Vektoranalysis – Flächen in $\mathbb{R}^3$ und Flächenintegrale

Themen des Tutoriums am 27.05.2015:

- Wiederholung: Ein *glattes Flächenstück* ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$, die eine reguläre Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ hat:
  - $U \subset \mathbb{R}^2$ ist offen,
  - φ bildet U bijektiv auf M ab,
  - φ ist stetig differenzierbar mit

    $$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \neq \mathbf{0}$$

    für alle $(u,v) \in U$.
- Der Flächeninhalt eines Flächenstücks M mit mit Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ ist

  $$\mathcal{F}(M) = \int_M d\sigma := \iint_U \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| d(u,v) \ .$$
- Für ein glattes Flächenstück M mit Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ und eine stetige Funktion (Skalarfeld) $f : M \to \mathbb{R}$ definiert man das *Oberflächenintegral von f über M* als

  $$\int_M f \, d\sigma := \iint_U f(\varphi(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| d(u,v) \ .$$

Bemerkung: Anstatt $d\sigma$ sieht man auch oft dA oder dS als Notation für das Oberflächenintegral.

Aufgabe 22

Parametrisieren Sie die Kugeloberfläche mit Radius $R > 0$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten (vgl. Aufgabe 18) und berechnen Sie damit den Flächeninhalt dieser Kugeloberfläche.

Aufgabe 23

Eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat eine zweidimensionale Graphenfläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Graphenfläche von $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$U := [0,2] \times [-1,1]$$

und

$$g(u,v) = 5 + 3v - \sqrt{10}\cosh(u) \qquad \text{für } (u,v) \in U \ .$$

Hinweis: Sie dürfen das Ergebnis aus Aufgabe 21 verwenden.

Aufgabe 24

Parametrisieren Sie die folgenden Flächen und berechnen Sie den Flächeninhalt:

(a) $M_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \leq x \leq 5\,,\ \ 2 \leq y \leq \frac{x}{2}\,,\ \ z = -2x + y - 2\}$.

(b) $M_b = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \leq x \leq 5\,,\ \ 2 \leq y \leq \frac{x}{2}\,,\ \ z = \sqrt{2xy}$.

Aufgabe 25

Betrachten Sie die Kugeloberfläche $S_R \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung aus Aufgabe 22. Berechnen Sie nun das Oberflächenintegral zur Funktion $\rho(x, y, z) = x$, d. h.

$$\int_{S_R} \rho \, d\sigma \ .$$

Aufgabe 26

Berechnen Sie die Masse einer halben Kugeloberfläche gegeben durch

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,,\ \ z \geq 0\}\ ,$$

wenn die Dichte $\rho(x, y, z) = 5 \arccos(z/R)$ beträgt. Hier ist natürlich ein Oberflächenintegral zu berechnen.

Lösungen

Auf den folgenden Seiten finden Sie meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 22
- Lösung zur Aufgabe 23
- Lösung zur Aufgabe 24
- Lösung zur Aufgabe 25
- Lösung zur Aufgabe 26

Aufgabe 22

Die Parametrisierung mit Kugelkoordinaten:

$$\Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(\varphi, \theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor wurde in Aufgabe 18 berechnet:

$$\| N(\varphi, \theta) \| = R^2 \sin\theta$$

Flächeninhalt: (S_R Kugeloberfläche mit Radius R)

$$\mathcal{F}(S_R) = \int_{S_R} d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \| N(\varphi, \theta) \| \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} R^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(-\cos(\pi) + \cos(0) \right) d\varphi$$

$$= 2R^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 4\pi \cdot R^2$$

Aufgabe 23

Bei einer Graphenfläche ist die Parametrisierung immer über

: $\varphi : U \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u,v) \end{pmatrix}$

gegeben.

In Aufgabe 21 wurde dies genau untersucht und der Normalenvektor erfüllt:

$$\|N(u,v)\| = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}$$

Hier ist $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = -\sqrt{10}\,\sinh(u)$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 3$$

und somit $\|N(u,v)\| = \sqrt{1 + 10\sinh^2(u) + 9}$

$$= \sqrt{10} \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(u)} \qquad \cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

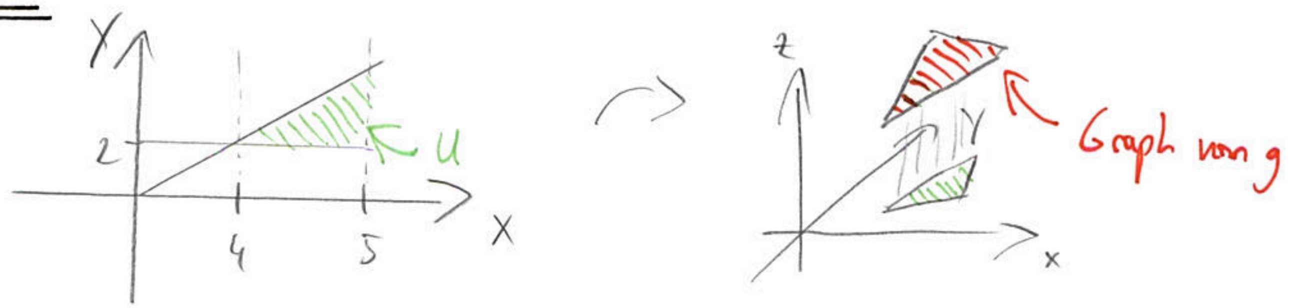
$$= \sqrt{10} \cdot \cosh(u)$$

Flächeninhalt von Graphenfläche M:

$$\mathcal{F}(M) = \int_M d\sigma = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \sqrt{10}\,\cosh(u)\, dv \right) du \quad = \underline{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sinh(2)}$$

Aufgabe 24

(a)



Das ist eine Graphenfläche mit der Funktion $g(u,v) = -2u+v-2$

Der Normalenvektor erfüllt dann $\|N(u,v)\| = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}$

und hier ist: $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = -2$, $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 1.$

Also: $\|N(u,v)\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

Flächeninhalt:

$$\mathcal{F}(M_a) = \iint_U \|N(u,v)\| \, d(u,v)$$

$$= \int_4^5 \left(\int_2^{u/2} \sqrt{6} \, dv \right) du = \int_4^5 \sqrt{6} \, \frac{u}{2} \, du$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}$$

(b) Eine Graphenfläche wie in (a) mit Funktion

$$g(u,v) = \sqrt{2uv}.$$

Der Normalenvektor erfüllt:

$$\|N(u,v)\| = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{v^2}{2uv} + \frac{u^2}{2uv}} = \sqrt{\frac{v^2+u^2+2uv}{2uv}}$$

$$= \underline{\frac{u+v}{\sqrt{2uv}}}$$

Flächeninhalt:

$$\mathcal{F}(M_b) = \iint_U \|N(u,v)\| \, d(u,v)$$

$$= \int_4^5 \Bigg(\underbrace{\int_2^{u/2} \frac{u+v}{\sqrt{2uv}} \, dv}_{(*)} \Bigg) du$$

$$(*) = \int_2^{u/2} \frac{u}{\sqrt{2uv}} \, dv + \int_2^{u/2} \frac{v}{\sqrt{2uv}} \, dv$$

$$= \Big[\sqrt{2uv} \Big]_2^{u/2} + \Big[\frac{2}{3\sqrt{2u}} \cdot v^{3/2} \Big]_2^{u/2}$$

$$= u - \sqrt{4u} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{3/2}} \cdot u - \frac{2}{3\sqrt{2u}} \cdot 2^{3/2}$$

$$= \underline{0{,}38003\ldots}$$

Aufgabe 25

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \Phi(\varphi, \theta) = R \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

sind wieder die Kugelkoordinaten für festes $R > 0$.

Oberflächenintegral:

$$\int_{S_R} \rho \, d\sigma = \iint_U \rho(\Phi(\varphi,\theta)) \cdot \|N(\varphi,\theta)\| \, d(\varphi,\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} R \sin(\theta) \cos(\varphi) \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

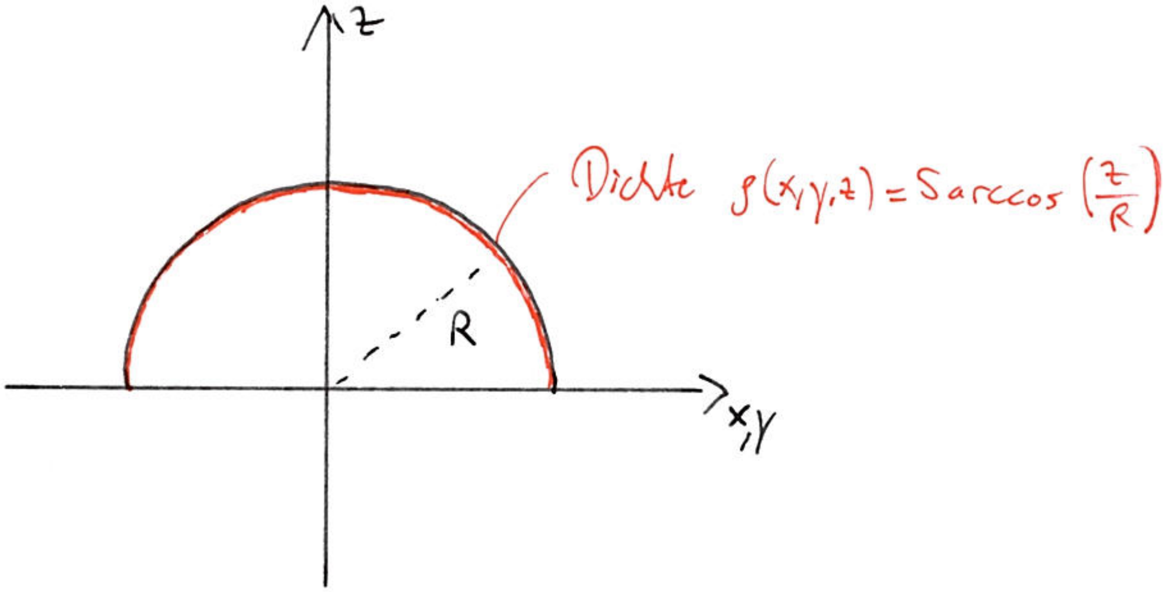
$$= R^3 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \left(\int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

[Stammfunktion von $\sin^2 x$ ist: $\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$]

$$= R^3 \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi}_{=0}$$

$$= \underline{0}$$

Aufgabe 26



Kugelkoordinaten: $\quad \Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \sin\theta \\ R \sin\varphi \sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix}$

Wir wissen von Aufgabe 18

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\| = R^2 \sin\theta$$

$$M = \int_F \rho \, dA \qquad \text{(Flächenintegral (skalar))}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 5 \arccos\left(\frac{R\cos\theta}{R}\right) \cdot R^2 \sin\theta \; d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 5 \cdot \theta \cdot R^2 \sin\theta \; d\theta \right) d\varphi = \underline{10\pi R^2}$$

[Stammfunktion von $\theta \sin\theta$ ist $\sin\theta - \theta\cos\theta$. Nachrechnen!]