Vektoranalysis – Flächen in $\mathbb{R}^3$

Themen des Tutoriums am 20.05.2015:

- Eine Fläche ist ein zweidimensionales Objekt im dreidimensionale Raum, z. B. eine Ebene oder die Kugeloberfläche.
- Ein *glattes Flächenstück* ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$, die eine reguläre Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ hat:
  - $U \subset \mathbb{R}^2$ ist offen,
  - φ bildet U bijektiv auf M ab,
  - φ ist stetig differenzierbar mit
    $$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \neq \mathbf{0}$$
    für alle $(u,v) \in U$.
- Eine *glatte Fläche* ist dann einfach eine Zusammensetzung aus glatten Flächenstücken. Oft reicht aber eine Parametrisierung, um die Fläche zu beschreiben. Andererseits kann man eine Parametrisierung in vielen Fällen auch geeignet „fortsetzen".
- Der Normalenvektor an jedem Flächenpunkt kann berechnet werden durch:
  $$N(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)$$
  für $(u,v) \in U$.

Aufgabe 18

Geben Sie eine Parametrisierung an, die einen Teil der Kugeloberfläche mit Radius $R > 0$ parametrisiert. Berechnen Sie den Normalenvektor für jeden Punkt der Parametrisierung und dann die Norm des Normalenvektors.

Aufgabe 19

Betrachten Sie die folgende Fläche
$$Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\,, z \in (-5,5)\}\;.$$

(a) Skizzieren Sie Z und beschreiben Sie die Fläche in Worten.

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung für einen Teil der Fläche.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Parametrisierung den Normalenvektor an jedem Punkt. Zeichnen Sie diesen in Ihre Skizze.

Aufgabe 20

Betrachten Sie die folgende Parametrisierung $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \big(2 + \cos(u)\big)\cos(v) \\ \big(2 + \cos(u)\big)\sin(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$$

(a) Skizzieren die Fläche in $\mathbb{R}^3$

(b) Warum ist dies eine glatte Fläche? Berechnen Sie dazu auch die Norm des Normalenvektors.

Aufgabe 21

Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat eine zweidimensionale Graphenfläche. Finden Sie für diese eine geeignete Parametrisierung und berechnen Sie den Normalenvektor und dessen Norm.

Lösungen

Auf den folgenden Seiten finden Sie meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 18
- Lösung zur Aufgabe 19
- Lösung zur Aufgabe 20
- Lösung zur Aufgabe 21

Aufgabe 18

Kugelkoordinaten:

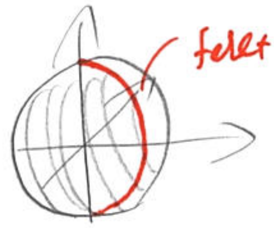
$$\Phi(r,\varphi,\theta) = r \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

mit $r = R$ ergibt dies Kugeloberfläche:

$f: (0,2\pi)\times(0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(\varphi,\theta) = \Phi(R,\varphi,\theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ist eine Parametrisierung der Kugeloberfläche



Normalenvektor:

$$N(\varphi,\theta) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \times \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$= -R^2 \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} = -R \cdot f(\varphi,\theta)\cdot \sin(\theta)$$

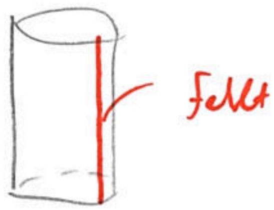
$$\| N(\varphi,\theta) \| = R^2 \cdot \sin\theta$$

Aufgabe 19

(a) "offener" Zylinder

(b)

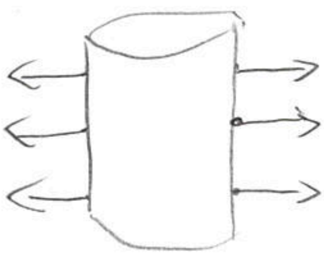
$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u \in (0, 2\pi) \quad , v \in (-5, 5)$$



(c)

$$N(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}}$$



Aufgabe 20

(a) Torus:

(b) Glatte Fläche, denn φ ist stetig differenzierbar und bildet den Definitionsbereich bijektiv auf einen Teil des Torus ab.

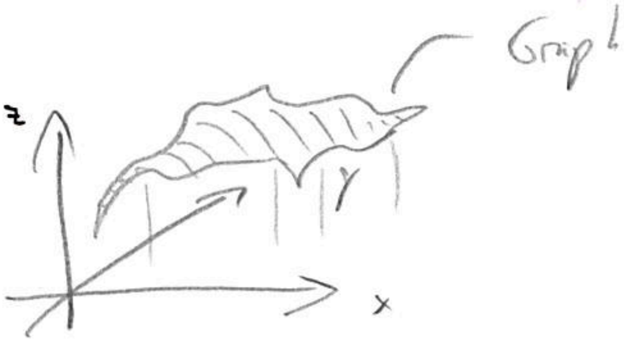
$$N(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$= -(2+\cos u) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \cos v \\ \cos u & \sin v \\ \sin u & \end{pmatrix}$$

$$\| N(u,v) \| = |2 + \cos(u)|$$

Aufgabe 21

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Parametrisierung:

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \qquad \text{für } (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Normalenvektor:

$$N(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} \\ -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\|N(u,v)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)^2}$$

$$= \underline{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}$$