Vektoranalysis - Kurvenintegrale in $\mathbb{R}^n$ und Potentiale

Themen des Tutoriums am 13.05.2015:

- Eine Abbildung $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ heißt ein *Vektorfeld auf* D. Jedem Raumpunkt wird demnach ein Vektorpfeil angeheftet. Wir betrachten meistens stetig differenzierbare Vektorfelder, d. h. die Komponenten

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix} , \quad (x,y,z) \in D ,$$

sind stetig differenzierbare Funktionen.

- **Kurvenintegral über Vektorfelder:** Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ und einen regulären Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ definiert man das *Kurvenintegral von* $\mathbf{v}$ *längs* γ durch:

$$\int_\gamma \mathbf{v} \bullet \mathbf{ds} := \int_a^b \mathbf{v}(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\, dt .$$

(Es heißt auch oft *Kurvenintegral 2. Art* oder *orientiertes Kurvenintegral*. Man schreibt auch oft

$$\int_\gamma \mathbf{v} \bullet \overrightarrow{dK}$$

oder

$$\int_\gamma v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

für dieses Kurvenintegral)

- **Potentiale:** Wenn es eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\nabla F = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix} ,$$

so gilt mit der Kettenregel $\frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) = \mathbf{v}(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)$ und jedes Kurvenintegral über $\mathbf{v}$ lässt sich sofort lösen:

$$\int_\gamma \mathbf{v} \bullet \mathbf{ds} = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))\, dt = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) .$$

Solch ein F heißt dann *Stammfunktion* oder *Potential* zum Vektorfeld $\mathbf{v}$. Das Vektorfeld nennt man dann *konservativ*.

- **Wichtiger Satz:** Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ (keine Löcher) hat ein Vektorfeld $\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3$ genau dann ein Potential, wenn

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

für alle $j,k = 1,2,3$ gilt. Die ist äquivalent zu $\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = 0$.

Aufgabe 14

Skizzieren Sie das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Betrachten Sie den Kreis mit Radius 1 um den Ursprung und parametrisieren Sie diesen mit einem Weg γ. Berechnen Sie dann das Kurvenintegral

$$I = \int_\gamma \mathbf{v} \bullet d\mathbf{s} .$$

Warum ergibt das Ergebnis Sinn? Erklären Sie dies kurz in Worten.

Aufgabe 15

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

$$I_i = \int_{\gamma_i} (y dx - (y - x) dy) = \int_{\gamma_i} \begin{pmatrix} y \\ -(y - x) \end{pmatrix} \bullet d\mathbf{s}$$

für $i \in \{a, b, c\}$, wobei alle Kurven den Startpunkt $(0, 0)$ und den Endpunkt $(1, 1)$ haben. Die Kurven lauten:

(a) Die Gerade zwischen den Punkten, d. h.

$$\gamma_a(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

(b)

$$\gamma_b(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

(c)

$$\gamma_c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16

Betrachten Sie die Kurve in $\mathbb{R}^3$, die durch den Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 1$ entsteht.

(a) Zeichnen Sie eine Skizze und parametrisieren Sie die Kurve mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sinnvoll.

(b) Berechnen Sie dann das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \mathbf{v} \bullet d\mathbf{s}$$

für das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = (-y, x, -z)$.

Aufgabe 17

Betrachten Sie das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2 + 3z, 3y + 3xz^2)$.

(a) Warum besitzt $\mathbf{v}$ ein Potential? Berechnen Sie ein solches.

(b) Berechnen Sie dann das Kurvenintegral

$$I = \int_\gamma \mathbf{v} \bullet d\mathbf{s}$$

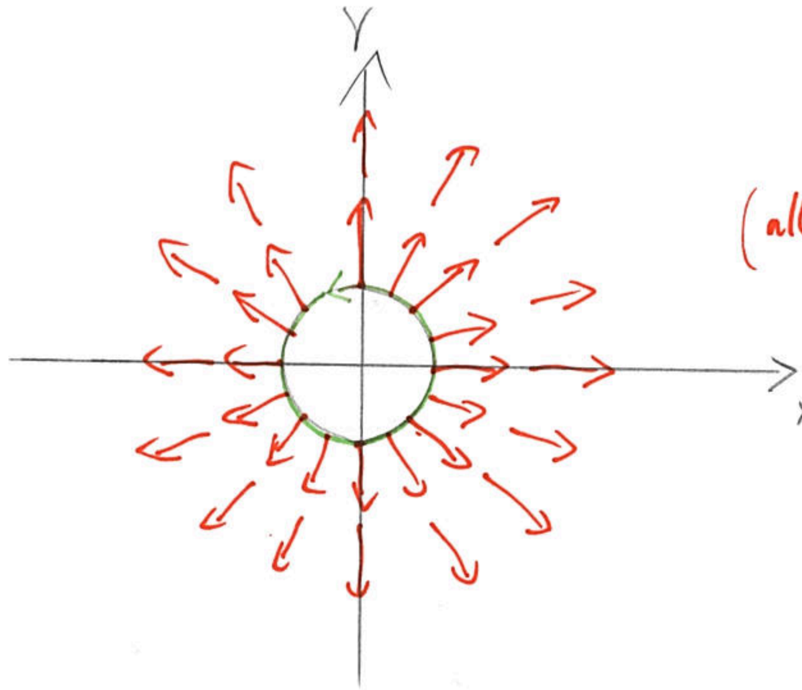
für einen Weg γ mit Anfangspunkt $(1, 1, 1)$ und Endpunkt $(3, 4, 5)$.

Lösungen

Auf den folgenden Seiten finden Sie meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 14
- Lösung zur Aufgabe 15
- Lösung zur Aufgabe 16
- Lösung zur Aufgabe 17

Aufgabe 14



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

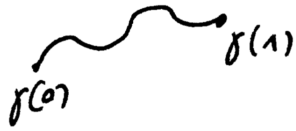
$$I = \int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

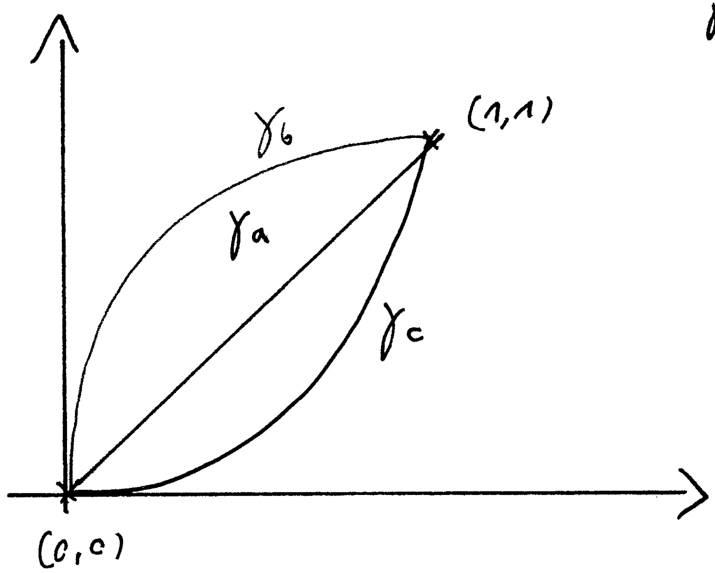
$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \quad = \underline{0}$$

Da das Vektorfeld immer senkrecht zur Kurve steht, verschwindet das Skalarprodukt ("$\vec{V} \cdot d\vec{s} = 0$") und es gibt keinen Beitrag zum Kurvenintegral.

Aufgabe 15

<u>Kurvenintegral:</u> Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$





<u>(a)</u>

$$I_a = \int_{\gamma_a} \left(y\,dx - (y-x)\,dy \right)$$

$$= \int_{\gamma_a} \vec{v}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -(y-x) \end{pmatrix}$$

$$:= \int_0^1 \left(\vec{v}(\gamma_a(t)) \cdot \dot{\gamma}_a(t) \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(t \cdot 1 + 0 \cdot 1 \right) dt = \underline{1/2}$$

15 (b)

$$I_b = \int_{\gamma_b} \vec{v}(x,y) \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ -(t-t^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 [3t^2 - t]\, dt = \left[t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}}$$

(c)

$$I_c = \int_{\gamma_c} \vec{v}(x,y) \cdot d\vec{s}$$

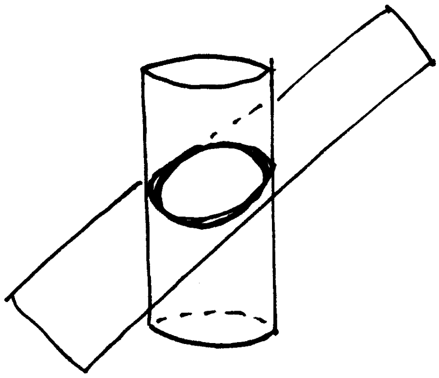
$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^n \\ t - t^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ n t^{n-1} \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^n + n t^n - n t^{2n-1}\right) dt$$

$$= \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{2}\right) = \underline{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 16

(a)



Parametrisierung: $\quad z = 1 - x - y \, , \quad \underbrace{x^2+y^2=1}_{\text{Kreis}}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1-\cos(t)-\sin(t) \end{pmatrix}$$

(b)

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -(1-\cos(t)-\sin(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\sin^2(t) + \cos^2(t) - \underbrace{(1-\cos(t)-\sin(t)) \cdot (-\cos(t)+\sin(t))}_{\text{Nebenrechnung machen } (*)} dt \right.$$

$$(*) = -\cos(t) + \cos^2(t) + \sin\cdot\cos + \sin(t) - \sin\cdot\cos - \sin^2(t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) - \cos^2(t) + \cos(t) - \sin(t) \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\sin^2(t) \right] dt + \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos(t) - \sin(t))\, dt}_{=0}$$

$$= \underline{2\pi}$$

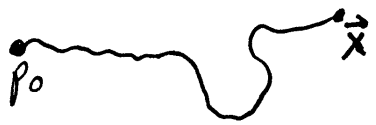
Aufgabe 17

(a) $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Warum besitzt $\vec{v}$ ein Potential?

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v} \text{ hat Potential} \iff \vec{v} \text{ keine Definitionslücken} \\ \qquad\qquad (\text{Definitionsgebiet} = \text{einfach zusammenhäng. Gebiet}) \\ \qquad\qquad + \quad \operatorname{rot}(\vec{v}) = 0 \end{array}}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3y + 3xz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Ist $p_0 = (0,0,0)$, dann

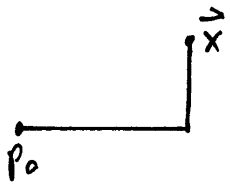


ist das Potential mit $\Phi(p_0) = 0$ gleich

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{p_0}^{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

für <u>beliebigen</u> Weg zwischen p_0 und $\vec{x}$.

Wir wählen:



Ableitung = konstant

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \qquad , \quad \underline{\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} tx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in [0,1]}$$

$$+ \int_0^1 \begin{pmatrix} 2xty \\ x^2 \\ 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dt \qquad , \quad \underline{\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ ty \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in [0,1]}$$

$$+ \int_0^1 \begin{pmatrix} 2xy + t^3z^3 \\ x^2 + 3tz \\ 3y + 3xz^2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} dt \qquad , \quad \underline{\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ tz \end{pmatrix}, \; t \in [0,1]}$$

$$= 0 + \int_0^1 x^2 y \, dt + \int_0^1 (3zy + 3xz^3t^2)\, dt$$

$$= yx^2 + 3zy + xz^3$$

Das Potential mit dem Wert 0 an dem Punkt $p_0 = (0,0,0)$ ist somit:

$$\Phi(\vec{x}) = x^2y + xz^3 + 3yz$$

(Probe mit grad Φ machen!)

(b)

$$I = \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

$$= \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0))$$

$$= \Phi(3,4,5) - \Phi(1,1,1)$$

$$= \underline{471}$$