Vektoranalysis - Kurven in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Themen des Tutoriums am 06.05.2015:

- *Wege* bzw. *parametrisierte Kurven* in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind stetige Abbildungen
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \, .$$
Ein Weg heißt *regulär*, wenn er stetig differenzierbar ist und für alle $t \in [a,b]$
$$\|\dot\gamma(t)\|^2 := |\dot\gamma_1(t)|^2 + |\dot\gamma_2(t)|^2 + |\dot\gamma_3(t)|^2 \neq 0$$
gilt.

- Bogenlänge:
$$L[\gamma] := \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt$$

- Der Tangenteneinheitsvektor eines Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch
$$T_\gamma(t) := \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} \, .$$

- Der Normaleneinheitsvektor eines ebenen Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch
$$N_\gamma(t) := \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|} \begin{pmatrix} -\dot\gamma_2(t) \\ \dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \, .$$

- Kurvenintegral. Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und einem regulären Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definiert man das *Kurvenintegral von f längs γ* durch:
$$\int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\| \, dt \, .$$
(Es heißt auch oft *Kurvenintegral 1. Art* oder *nicht orientierte Kurvenintegral*. Man schreibt auch oft
$$\int_\gamma f \, dK$$
für dieses Kurvenintegral)

Aufgabe 10

Betrachten Sie die folgende parametrisierte Kurve:
$$\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2 \, , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \, .$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve, d. h. das Bild der Abbildung.

(b) Handelt es sich um einen *regulären* Weg?

(c) Geben Sie Tangenteneinheitsvektor und Normaleneinheitsvektor für jeden Punkt an.

Aufgabe 11

Betrachten Sie die folgende parametrisierte Kurve:

$$\gamma : [0, R] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ t \end{pmatrix}\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve, d. h. das Bild der Abbildung.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

Aufgabe 12

Betrachten Sie die folgende parametrisierte Kurve:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve, d. h. das Bild der Abbildung. Woher kennen Sie diese Kurve?

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

Aufgabe 13

Geben Sie eine reguläre Parametrisierung $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ des Kreises um den Ursprung mit Radius 2 an.

(a) Berechne das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (x + y^2)\, ds\,.$$

(b) Berechne das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (x^2 + y^2)\, ds\,.$$

$$\int_\gamma f = 2\pi \mathrm{i} \sum_z \nu_\gamma(z)\, \mathrm{Res}_z(f)$$

$$f : G \setminus A \to \mathbb{C}$$

holomorph

Lösungen

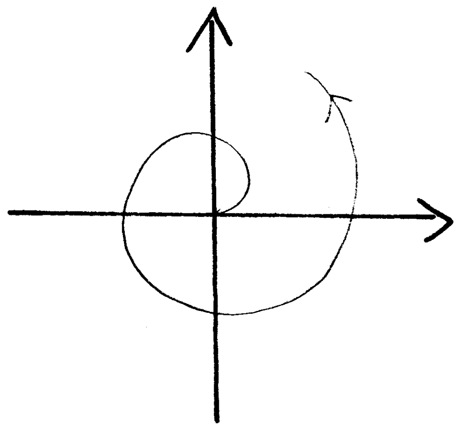
Auf den folgenden Seiten finden Sie meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 10
- Lösung zur Aufgabe 11
- Lösung zur Aufgabe 12
- Lösung zur Aufgabe 13

Aufgabe 10

$$\gamma(t) = t \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

(a)



(b) $$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + t \cdot (-\sin(t)) \\ \sin(t) + t \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, \infty)$$

(c)

$$\underline{T_\gamma(t) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) + t(-\sin t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \end{pmatrix}}$$

mit $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \cos^2 + \sin^2 + t^2(s^2 + c^2)$

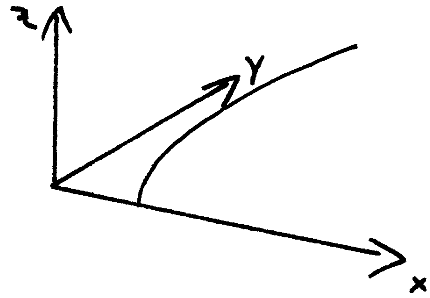
$$= \underline{1 + t^2}$$

$$\underline{N_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) - t\cos(t) \\ \cos(t) - t\sin(t) \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 11

$$\gamma(t) = (\cosh(t)\ \sinh(t)\ ,\ t)$$

(a)



(b)

Bogenlänge benötigt: $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \sinh^2(t) + \cosh^2(t) + \underbrace{1}_{= \cosh^2 - \sinh^2}$$

$$= 2\cosh^2(t)$$

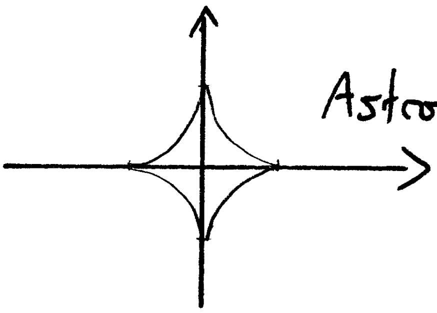
$$L[\gamma] = \int_0^R \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt = \int_0^R \sqrt{2}\cosh(t)\, dt$$

$$= \underline{\sqrt{2}\sinh(R)}$$

Aufgabe 12

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$$

(a)



Astroide

(b)

Bogenlänge: $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -3\cos^2(t)\sin(t) \\ 3\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix}$

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t)$$

$$= 9\cos^2(t)\sin^2(t)\,\big(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{1}\big)$$

$$L[\gamma] = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 3|\cos(t)|\cdot|\sin(t)|\,dt$$

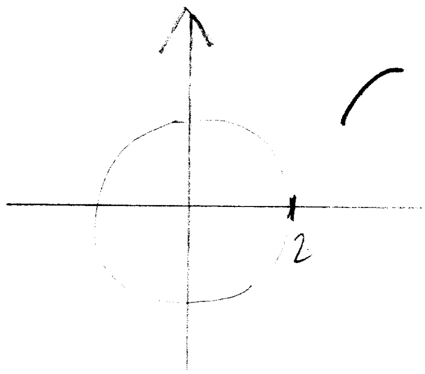
$$= \left(\int_0^{\pi/2} 3\cos(t)\cdot\sin(t)\,dt\right)\cdot 4 \qquad \text{(Symmetrie verwenden!)}$$

$\cdot 4$

$$= 12\cdot\left[\tfrac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 12\cdot\tfrac{1}{2} = \underline{6}$$

Aufgabe 13



$$\gamma(t) = 2\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

(a)

$$\int_\gamma (x+y^2)\, ds = \int_0^{2\pi} \left(2\cos(t) + 4\sin^2(t)\right)\cdot \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

Dabei ist $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) = 4$

und damit $\|\dot{\gamma}(t)\| = \underline{2}$

$$\int_\gamma (x+y^2)\, ds = 2\cdot\left(\underbrace{\int_0^{2\pi} 2\cos(t)\, dt}_{=0 \text{ aus Symmetriegründen}} + 4\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt\right)$$

$$= 8\cdot\left[\frac{1}{2}\left(t - \cos(t)\sin(t)\right)\right]_0^{2\pi} = \underline{8\pi}$$

(b)

$$\int_\gamma (x^2+y^2)\, ds = \int_0^{2\pi} 4\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)\cdot 2\, dt$$

$$= 8\cdot\int_0^{2\pi} dt = \underline{16\pi}$$