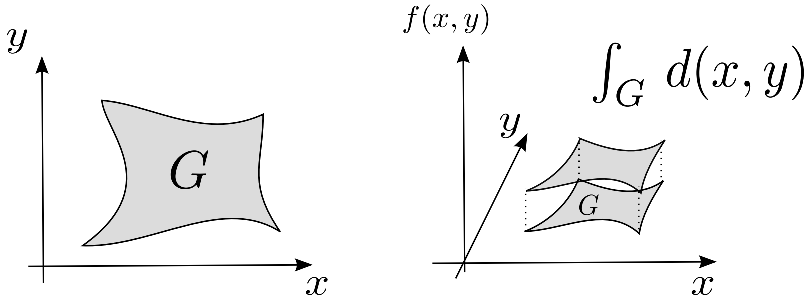
Mehrdimensionale Integration - Flächen und Volumina messen

Themen des Tutoriums am 29.04.2015:

- Mehrdimensionale Integration um Flächen und Volumina messen.
- Wichtige Hilfsmittel sind immer noch der Satz von Fubini und die Transformationsformel (Substitution).
- Die wichtigste Transformation: Polar- bzw. Kugelkoordinanten.



Zweidimensionale Flächen können mit Hilfe eines zweidimensionalen Integrals berechnet werden, indem einfach die konstante Funktion $f(x, y) = 1$ integriert wird. Dies ist skizzenhaft im obigen Bild dargestellt:

$$\text{Flächeninhalt}(G) = \int_G 1\, d(x, y)$$

Genauso kann man nun dreidimensionale Volumen durch ein dreidimensionales Integral berechnen.

In beiden Fällen ist das wichtige Rechenhilfsmittel die Transformationsformel. Man versucht das Gebiet G durch eine gute Substitution auf ein Gebiet zu transformieren, welches dann gut integrierbar ist. Bei kugelsymmetrischen Gebilden bieten sich z. B. oft Kugelkoordinaten an.

Aufgabe 7

Skizzieren Sie die folgenden Fläche und berechnen Sie die Flächeninhalt mit Hilfe eines zweidimensionalen Integrals:

> Die Fläche im 1. Quadraten $(x, y \geq 0)$ zwischen den Geraden $y = x$ und $x = 3 > 0$ und der Hyperbel $y = \lambda^2/x$ mit $0 < \lambda < 3$.

Aufgabe 8

Skizzieren Sie den folgenden Körper und berechnen Sie das Volumen mit Hilfe von dreidimensionalen Integralen

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\; y \geq 0\}.$$

Aufgabe 9

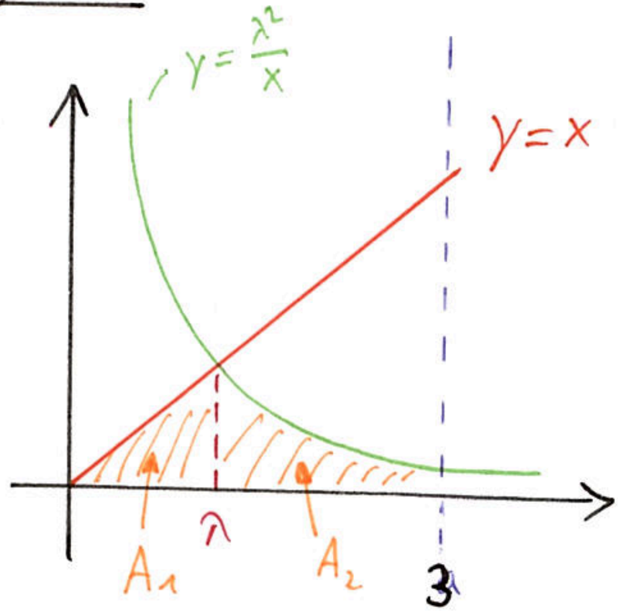
Skizzieren Sie die Astroide beschrieben durch $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a > 0$. Berechnen Sie den eingeschlossenen Flächeninhalt mit Hilfe von neuen Koordinaten $x = \rho \cos^3(\theta)$ und $y = \rho \sin^3(\theta)$.

Lösungen

Auf den folgenden Seiten finden Sie meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 7
- Lösung zur Aufgabe 8
- Lösung zur Aufgabe 9

Aufgabe 7



Gesamte eingeschlossene Fläche:

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^\lambda \left(\int_0^x 1\, dy \right) dx + \int_\lambda^3 \left(\int_0^{\lambda^2/x} 1\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^\lambda x\, dx + \int_\lambda^3 \frac{\lambda^2}{x}\, dx$$

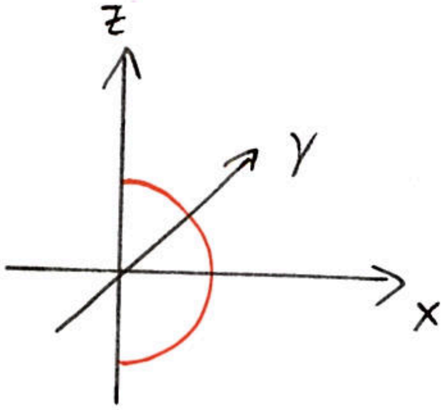
$$= \frac{1}{2}\lambda^2 + \left[\ln|x| \cdot \lambda^2 \right]_\lambda^3$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda^2 \cdot \ln\left(\frac{3}{\lambda}\right)$$

$$= \lambda^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{\lambda}\right) \right)$$

Aufgabe 8

$A =$ Halbkugel



$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A 1 \; d(x,y,z)$$

Transformation mit Kugelkoordinaten:

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r \\ \text{atan}2(y,x) = \varphi \\ \arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \theta \end{pmatrix}$$

unwichtig und kompliziert (s. Wikipedia Kugelkoordinaten)

Transformationsformel:

$$\int_{A=\Phi(\tilde{A})} f(x,y,z) \; d(x,y,z) = \int_{\tilde{A}} f(r,\varphi,\theta) \left| \det J_\Phi(r,\varphi,\theta) \right| \cdot d(r,\varphi,\theta)$$

Berechnung von $\tilde{A}$ und $\det J_\Phi$

$\tilde{A} = \Phi^{-1}(A)$

Bei Kugelkoordinaten immer!

$= \{ (r, \varphi, \theta) \mid r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi],$

$\underset{\sqrt{\cdots}}{r \leq 1}, \quad \underbrace{r \cdot \sin\theta \sin\varphi}_{= y} \geq 0 \}$

$= \{ (r, \varphi, \theta) \mid r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi],$

$r \leq 1, \quad \varphi \in [0, \pi] \}$

$= \{ (r, \varphi, \theta) \mid r \in [0, 1], \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, \pi] \}$

$\det J_\Phi (r, \varphi, \theta) = r^2 \cdot \sin\theta$ (Bitte nachrechnen!)

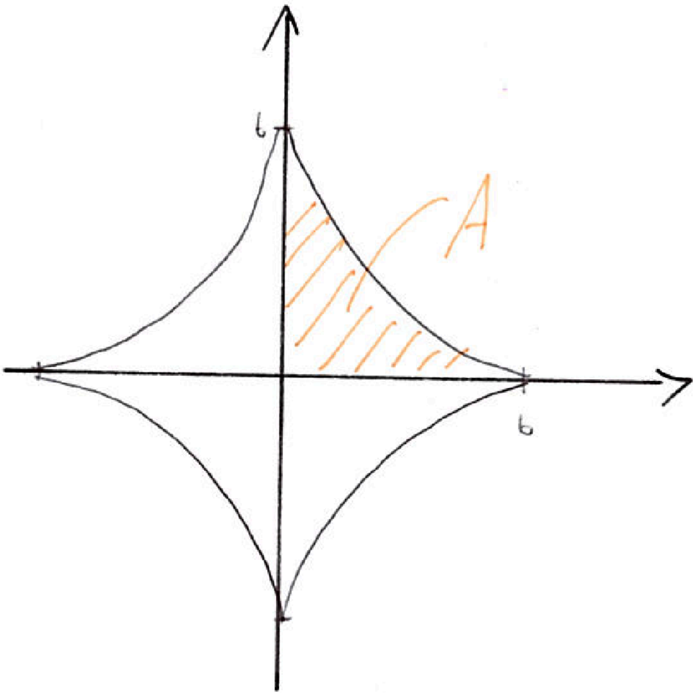
Nun ergibt dies mit Transformationsformel:

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A 1 \, d(x, y, z) = \int_{\tilde{A}} 1 \; r^2 \cdot \sin\theta \; d(r, \varphi, \theta)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^\pi r^2 \cdot \sin\theta \; d\varphi \right) d\theta \right) dr = \frac{4}{6}\pi$$

Aufgabe 9

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a =: b^{2/3} > 0 \quad \text{(Astroide / Sternkurve)}$$



Eine Parametrisierung ist $\theta \mapsto \begin{pmatrix} b(\cos\theta)^3 \\ b(\sin\theta)^3 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\text{Fläche} = 4 \cdot A = 4 \cdot \int_A 1 \cdot d(x,y)$

Neue Koordinaten: $\Phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos^3\theta \\ \rho\sin^3\theta \end{pmatrix} = \text{"}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\text{"}$

$$\det\left(J_\Phi(\rho,\theta)\right) = \frac{3\rho}{8}(1-\cos(4\theta))$$

wobei $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ verwendet wurde.

Schreibe nun $B := \{(\rho,\theta) \mid \rho \in [0,b],\ \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]\}$

$$\text{Fläche} = 4 \cdot A = 4 \cdot \int_B |\det J_\Phi(\rho,\theta)| \, d(\rho,\theta) = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^b \frac{3}{8}\rho(1-\cos 4\theta)\, d\rho \right) d\theta$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{32}\pi a^3 = \underline{\frac{3}{8}\pi a^3}$$