**Mehrdimensionale Integration**

Themen des Tutoriums am 22.04.2015:

- Integration als „Volumen messen“.
- 1-dim. und 2-dim. Integration.
- Satz von Fubini, um zweidimensionale Integrale auf eindimensionale zu reduzieren.
- Substitution/ Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale

**Aufgabe 1**

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \leq y,\ y + x^2 \leq 3\}\ .$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_G x^2 \, d(x, y)$$

**Aufgabe 2**

(a) Skizziere die Menge

$$B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \leq 1 + y\right\}\ .$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$I = \int_B \cos\left(\frac{x - y}{x + y}\right) \, d(x, y)$$

*Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = x - y$ und $v = x + y$ und damit die Transformationsformel.*

**Lösungen**

Auf den folgenden Seiten finden Sie meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 1
- Lösung zur Aufgabe 2

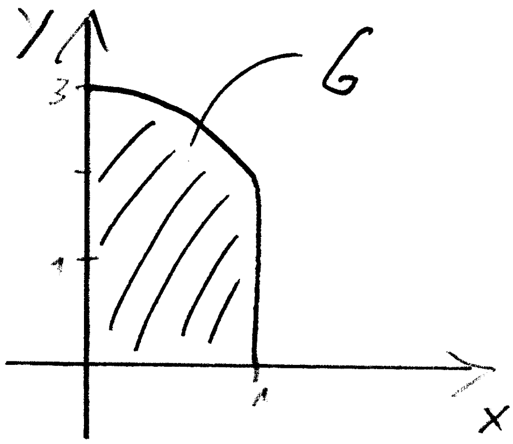
## Aufgabe 1

(a) Alle Ungleichungen einzeln aufschreiben:

$$\begin{cases} 0 \le x \\ x \le 1 \\ 1 \le y \\ y \le 3 - x^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in [0,1] \text{ und } y \in [1, 3-x^2]$$

Damit ergibt sich das Bild




(b)

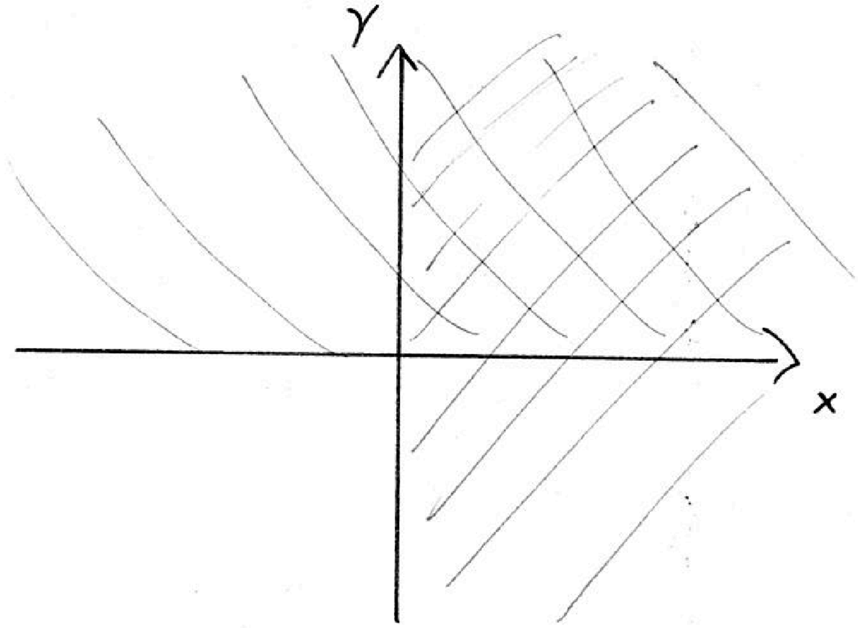
$$I = \int_G x^2 \, d(x,y) = \int_0^1 \left( \int_1^{3-x^2} x^2 \, dy \right) dx$$

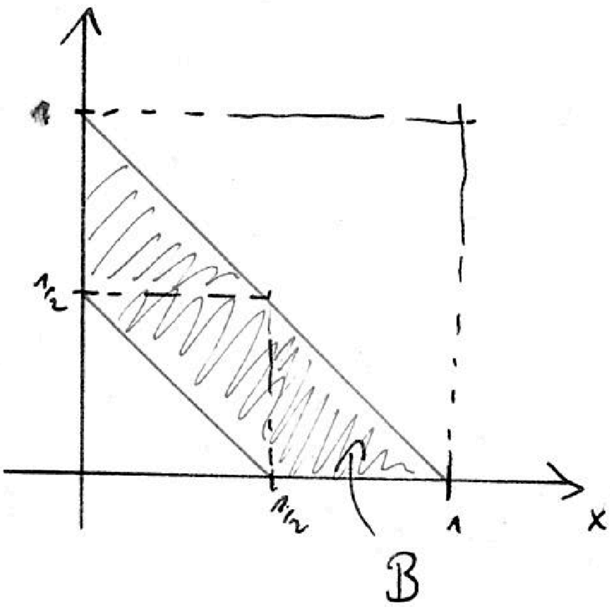
$$= \int_0^1 x^2 \cdot (3 - x^2 - 1) \, dx = \underline{\underline{\frac{7}{15}}}$$

Aufgabe 2

$$I = \int_B \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) d(x,y)$$

$$B = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x \geq 0 \\ 1 \leq 1 + y \;\Leftrightarrow\; y \geq 0 \\ x+y \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{array} \right\}$$




$\frac{1}{2} \leq x+y \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2} - x$

$x+y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1 - x$

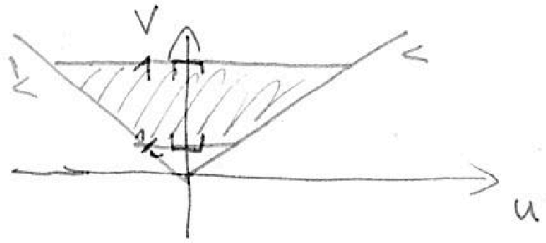
Deswegen Transformation um "Rechteck" zu bekommen:

$$\Phi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \begin{matrix} =u \\ =v \end{matrix}$$

$$u+v = 2x$$
$$v-u = 2y$$

$$\tilde{B} = \Phi^{-1}(B) = \left\{ (u,v) \;\middle|\; v \in [\tfrac{1}{2}, 1],\; \underset{v \geq -u}{u+v \geq 0},\; \underset{v \geq u}{v-u \geq 0} \right\}$$

$$= \left\{ (u,v) \;\middle|\; v \in [\tfrac{1}{2}, 1],\; u \in [-v, v] \right\}$$

$\tilde{B} =$ 


<u>Rechnung:</u>

$$I = \int_{B=\Phi(\tilde{B})} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\tilde{B}} f(\Phi(u,v)) \left|\det J_\Phi(u,v)\right| d(u,v)$$

mit $f(\Phi(u,v)) = \cos\left(\frac{u}{v}\right)$

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+v) \\ \frac{1}{2}(v-u) \end{pmatrix}$$

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det J_\Phi(u,v) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$I = \int_{\widetilde{B}} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{2} \, d(u,v)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_{1/2}^{1} \left( \int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du \right) dv \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_{1/2}^{1} \underbrace{v \cdot \sin\left(\frac{u}{v}\right) \Big|_{-v}^{v}}_{v \cdot \sin(1) - v \cdot \sin(-1)} dv \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_{-1/2}^{1} v^2 \cdot \left( \sin(1) - \sin(-1) \right) dv \right]$$

ungerade Fkt.

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin(1) \cdot \left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_{-1/2}^{1} = \frac{1}{2} \sin(1) \cdot \left( 1 - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{8} \sin(1)}}$$