Mehrdimensionale Integration – Übungen

Zusätzliche Übungsaufgaben zum Tutorium am 22.04.2015:

Aufgabe 3

(a) Skizziere die Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 2\}\ .$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_G (x^2 + y^2)\, d(x,y)\ .$$

Aufgabe 4

(a) Skizziere die Menge

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}\ .$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_B (|x| + |y|)\, d(x,y)$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini auf zwei verschiedene Weisen.

Aufgabe 5

(a) Skizziere die Menge

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}\ .$$

(b) Berechne das zweidimensionale Integral

$$\int_B xy\, d(x,y)$$

mit Hilfe von Symmetrieargumenten.

Aufgabe 6

(a) Skizzieren Sie einen viertelkreisförmigen Tisch und berechnen Sie die Masse

$$M = \int_{\text{Tisch}} 1 \, d(x,y) \ ,$$

indem Sie auf Polarkoordinaten transformieren.

(b) Berechne Sie nun ebenfalls den Schwerpunkt des Tisches, d. h.

$$s_x = \frac{1}{M} \int_{\text{Tisch}} x \, d(x,y) \, , \qquad \text{und} \qquad s_y = \frac{1}{M} \int_{\text{Tisch}} y \, d(x,y) \ .$$

(c) Wie groß ist das Trägheitsmoment des Tisches, wenn dieser um seine Ecke rotiert wird? (Das heißt, die Drehachse befindet sich im Kreismittelpunkt senkrecht zur Tischebene.)

Lösungen

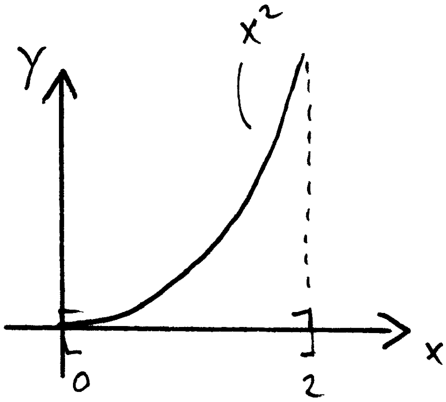
Auf den folgenden Seiten finden Sie meine eingescannten Lösungen. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 3
- Lösung zur Aufgabe 4
- Lösung zur Aufgabe 5
- Lösung zur Aufgabe 6

Aufgabe 3

(a)

$G =$



(b)

$$\int_B (x^2+y^2)\, d(x,y) = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} (x^2+y^2)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right] \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx$$

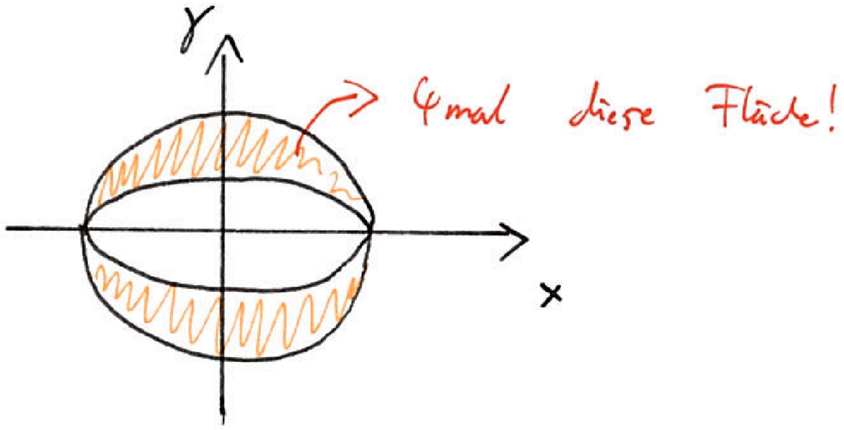
$$= \int_0^2 \left(x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3 \cdot 7} x^7 \right] \Big|_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{5} 2^5 + \frac{1}{21} 2^7 = \underline{\underline{\frac{1312}{105}}} \approx 12{,}5$$

Aufgabe 4

$$B := \{(x,y) \mid \underbrace{1 \leq x^2 + 4y^2}_{\text{Ellipse}}, \underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{\text{Kreis}}\}$$



$$I = \int_B (|x|+|y|)\, d(x,y) = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\, dy \right) dx$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 x \cdot y + \frac{1}{2} y^2 \Big|_{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \overset{\text{rechnen!}}{=} \underline{4 \cdot \frac{5}{12}}$$

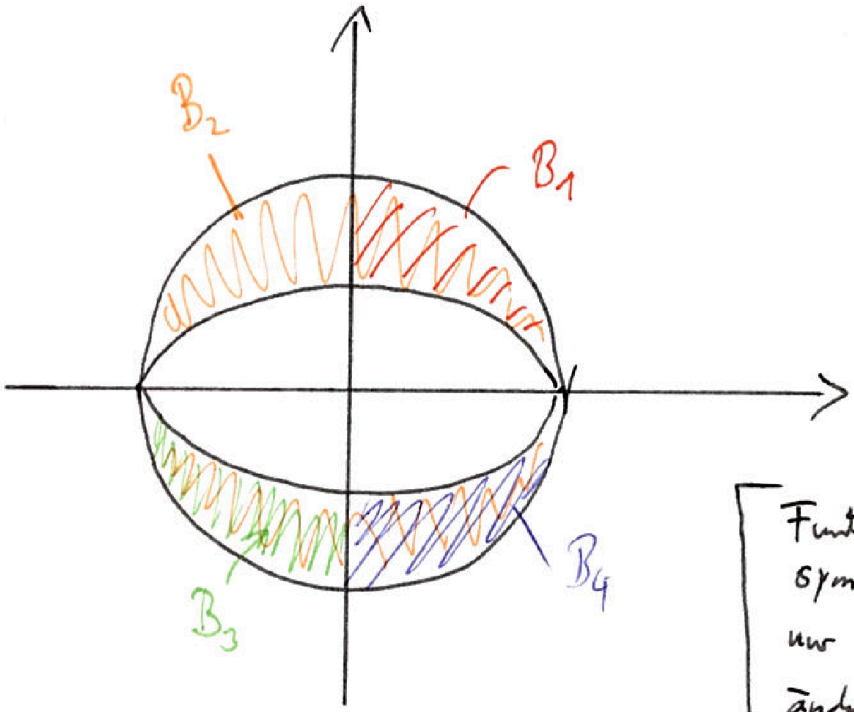
oder mit Fubini genau anders herum:

$$I = 4 \cdot \left(\int_0^{1/2} \left(\int_{\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\, dx \right) dy + \int_{1/2}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\, dx \right) dy \right)$$

$$= 4 \left(\int_0^{1/2} \frac{1}{2}x^2 + x \cdot y \Big|_{\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy + \cdots \right) \overset{\text{rechnen!}}{=} \underline{4 \cdot \frac{5}{12}}$$

Aufgabe 5

Wie bei Aufgabe 4 ist die Skizze die folgende:



[Funktion ist symmetrisch und nur das Vorzeichen ändert sich auf B_1, B_2, B_3, B_4.]

Das Integral ist nun aber $I = \int_B xy \, d(x,y)$,

d.h. wenn wir dies in 4 Teile aufspalten, dann müssen diese betragsmäßig gleich sein:

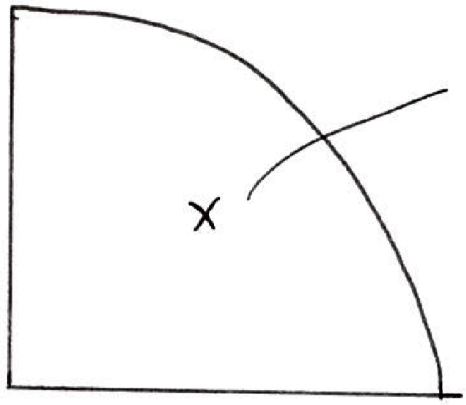
$$I = \int_{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4} xy \, d(x,y) = \int_{B_1} \overset{>0}{x} \underset{>0}{y} \, d(x,y) + \int_{B_2} \overset{<0}{x} \underset{>0}{y} \, d(x,y) + \int_{B_3} \overset{<0}{x} \underset{<0}{y} \, d(x,y) + \int_{B_4} \overset{>0}{\cdots} \underset{<0}{}$$

$$= \int_{B_1} xy \, d(x,y) - \int_{B_1} xy \, d(x,y) + \int_{B_1} xy \, d(x,y) - \int_{B_1} xy \, d(x,y)$$

$$= \underline{0}$$ (hebt sich genau weg!)

Aufgabe 6

Hier sind mehrdimensionale Integrale zu lösen, indem man sie auf Polarkoordinaten transformiert.



Masse: $M = \int_{\text{Tisch}} 1 \, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} 1 \cdot r \, d\varphi \right) dr$

$= \underline{\frac{\pi}{4}}$

Schwerpunkt: $s_x = \frac{1}{M} \int_{\text{Tisch}} x \, d(x,y) = \frac{1}{M} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r \cos\varphi \cdot r \, d\varphi \right) dr$

$= \underline{\frac{4}{3\pi}} = s_y$ (aus Symmetriegründen)

Trägheitsmoment: $\tau = \int_{\text{Tisch}} (x^2+y^2) \, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \, d\varphi \right) dr$

$= \underline{\frac{\pi}{8}}$