Funktionentheorie – Laurentreihen

Themen des Tutoriums am 08.07.2015:

Eine *Potenzreihe* ist eine Abbildung

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für gegebene Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$. Die Werte $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert, heißt der Konvergenzbereich der Potenzreihe. Es stellt sich nun heraus, dass es für jede Potenzreihe einen festen Radius R in der Form gibt, dass für alle $|z| < R$ die Reihe immer konvergiert, während für $|z| > R$ die Reihe immer divergiert. Aus diesem Grund nennt man diese Zahl den *Konvergenzradius der Potenzreihe*. An dieser Stelle sei erwähnt, dass auch die Grenzfälle $R = 0$ und $R = \infty$ als „Radien" angenommen werden können. Letzteres bedeutet nichts anderes, dass die Reihe für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, was eindeutig der beste Fall ist.

Berechnungsformeln: Für den Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ einer Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C}$$

gelten folgende zwei Berechnungformeln:

$$R = \left[\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1} \quad \text{mit } 0 := \frac{1}{\infty},\ \infty := \frac{1}{0} \tag{1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \le R \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{mit } a_n \neq 0 \text{ für alle } n \ge N \tag{2}$$

Eine *Laurentreihe* besteht aus zwei Potenzreihen in der folgenden Form:

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Dies schreibt man dann auch kurz als

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n .$$

Das Konvergenzgebiet ist dann durch die zwei Konvergenzradien bestimmt:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R_1} < |z| < R_2 \right\} .$$

Dabei ist R_1 der Konvergenzradius der Potenzreihe $w \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} w^n$ und R_2 von $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Alle Reihen kann man anstatt um 0 auch um $z_0 \in \mathbb{C}$ betrachten. Dabei verschiebt sich nur der Entwicklungspunkt, sodass sich kaum etwas ändert.

Sehr wichtig bei der Berechnung von Laurentreihen ist die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{für } |z| < 1 \, .$$

Aufgabe 55

Berechnen Sie die Laurent-Reihe von

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ auf dem Ringgebiet $1 < |z| < \sqrt{2}$.

Aufgabe 56

Die folgende Laurentreihe sei gegeben:

$$f(z) := \sum_{n=-7}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^n \, .$$

Was ist der Konvergenzbereich dieser? Und was ist das Residuum an der Stelle 0?

Aufgabe 57

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \, .$$

(a) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f auf größtmöglichen Gebieten

  (i) um den Entwicklungspunkt $z_0 = \mathrm{i}$

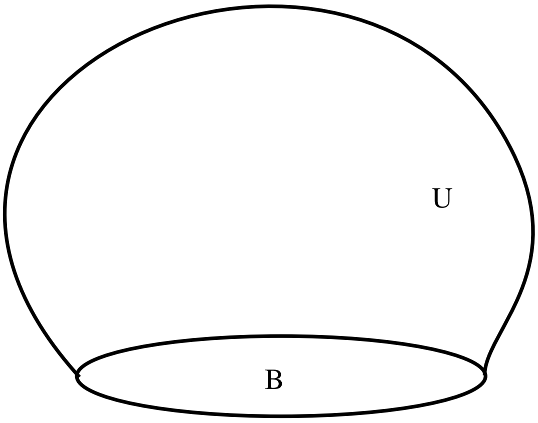
  (ii) um den Entwicklungspunkt $z_0 = -\mathrm{i}$

  Skizzieren die Gebiete dabei und verwenden Sie die Partialbruchzerlegung von f.

(b) Welche Ordnung haben die Polstellen? Was sind die Residuen in den Polstellen?

(c) Berechnen Sie

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|} f(z)\, dz \, .$$



Aufgabe 58 - Zusatz zur Vektoranalysis

(a) Welcher Integralsatz aus der Vorlesung eignet sich zur Berechnung des Flusses durch die Oberfläche eines regulären Bereichs G? Geben Sie die Berechnungsformel aus diesem Satz an!

(b) Der Körper G sein ein regulärer Bereich mit Grundfläche

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} .$$

Weiterhin sei das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{y^2+1} \\ y + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ -2z \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{V}$ durch den unbekannten Teil U der Oberfläche von G.