Funktionentheorie – Der Residuensatz

Themen des Tutoriums am 01.07.2015:

- Wenn D offen ist, $a_1, \dots, a_k \in D$ und $f : D \setminus \{a_1, \dots, a_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann heißen die Punkte $a_1, \dots, a_k$ *isolierte Singularitäten von* f.
- Wenn $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, so können für die isolierte Singularität nur drei Fälle auftreten:
  (a) f ist auch auf ganz D fortsetzbar und holomorph. Dann heißt a hebbare Singularität.
  (b) f hat bei a einen Pol der Ordnung N, d. h.
  $$\lim_{z\to a} (z-a)^N f(z) = \text{Konstante} \in \mathbb{C}$$
  aber $\lim_{z\to a} (z-a)^{N-1} f(z)$ existiert nicht.
  (c) f hat eine wesentliche Singularität bei a, d. h.
  $$\lim_{z\to a} (z-a)^n f(z)$$
  existiert für kein $n \in \mathbb{N}$.
- Für eine isolierte Singulariät a von f heißt der Wert des Integral
  $$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z-a|=r} f(z)\, dz$$
  das *Residuum von f bei a*. Dabei muss r so klein sein, dass nur eine einzige Singularität eingeschlossen wird.
- Es gibt verschiedene Möglichkeiten Residuen zu berechnen. Der wichtigste Satz ist der folgende: Wenn $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph sind und g eine *einfache* Nullstelle in $a \in D$ hat, dann gilt:
  $$\mathrm{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)} \ .$$
- Bei höherer Polstellenordnung sieht die Formel komplizierter aus: Hat f bei a eine Polstelle von Ordnung N dann gilt:
  $$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \tfrac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\partial^{N-1}}{\partial z^{N-1}} [(z-a)^N f(z)] \ .$$
- **Residuensatz:** Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \setminus \{a_1, \dots a_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist nun γ ein (stückweise) glatter geschlossener Weg, der alle $\{a_1, \dots a_n\}$ genau einmal gegen den Uhrzeigersinn umläuft, so gilt
  $$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \ = \ 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=a_k} f(z) \ .$$

Hinweis: Ich verwende i *für die imaginäre Einheit und* $\overline{z}$ *für die komplexe Konjugation.*

Aufgabe 51

Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{Z}$ das folgende Residuum mit Hilfe des Kurvenintegrals

$$\mathrm{Res}_{z=0} z^k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=r} z^k \, dz \, .$$

Denken Sie bitte an eine passende Fallunterscheidung.

Aufgabe 52

Verwenden Sie die obige Aufgabe, um sofort das Residuum der Funktion in 0 anzugeben:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{5}{z^2} + \frac{7}{z} + 3 + z + z^2 + z^4 + 4z^5 + 18z^6 \, .$$

Wie lautet das Residuum an allen anderen Stellen?

Aufgabe 53

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes. Dazu müssen Sie zuerst die eingeschlossenen Residuen bestimmen.

(a) $\oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{16}{16z^2+1} \, dz$

(b) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{3z^2-1}{z^3-z} \, dz$

(c) $\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{z^2 e^{(z^2)}}{z-\mathrm{i}} \, dz$

(d) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2} \, dz$
(Stellen Sie hier den Sinus als eine Potenzreihe dar.)

Aufgabe 54

Berechne Sie mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden reelle Integrale. Zeichnen Sie zuerst einen passenden Integrationsweg und berechnen Sie die nötigen Residuen separat.

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$$

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}$$

(c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

Lösungen

Auf den folgenden Seiten findet ihr meine eigenen Lösungen der Aufgaben. Diese sind nicht als Musterlösungen gedacht, sondern eher als Überprüfung eurer eigenen Rechnungen. Es können Schreibfehler oder unleserliche Dinge auftreten. Alle Probleme klären wir am besten in der Übung selbst.

- Lösung zur Aufgabe 51 bis 53
- Lösung zur Aufgabe 54

Aufgabe 51

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^k = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} \cdot i \cdot r e^{it} \, dt$$

$$= \frac{r^{k+1}}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} \, dt}_{\substack{= 0 \text{ für } k \neq -1 \\ = 2\pi \text{ für } k = -1}}$$

$$= \begin{cases} 0 \,, & k \neq -1 \\ 1 \,, & k = -1 \end{cases}$$

Aufgabe 52

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 7$$

Aufgabe 53

(a) $\operatorname{Res}_{z=\frac{1}{4}i} f(z) = \left(\frac{1}{2} i\right)^{-1}$, $\operatorname{Res}_{z=-\frac{1}{4}i} f(z) = -\left(\frac{1}{2} i\right)^{-1}$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{3}} f(z) \, dz = 0$$

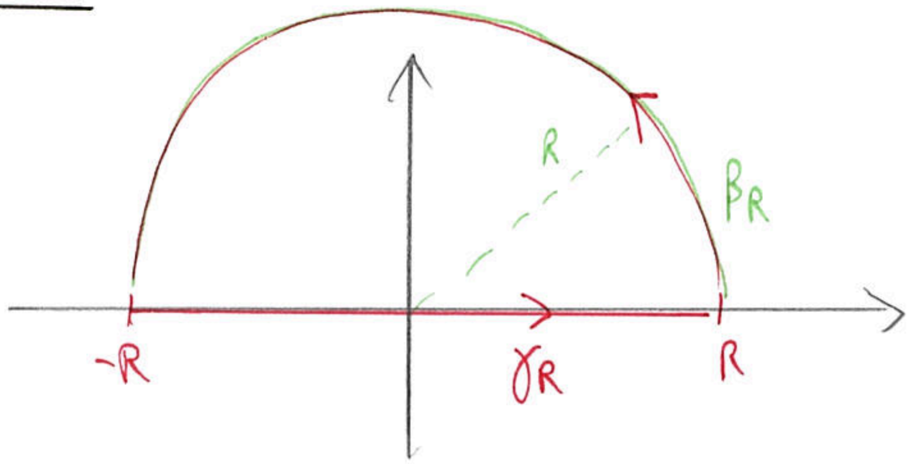
(b) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1$, $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) \, dz = 2\pi i$

(c) $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = -\frac{1}{e}$, $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} f(z) \, dz = -\frac{2\pi i}{e}$

(d) $f(z) = \frac{1}{z} + \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k+1}}{(2k+3)!}$, $\operatorname{Res}_0 f(z) = 1$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} f(z) \, dz = 2\pi i$$

Aufgabe 54



Ganzer Weg Γ_R

Nach dem Residuensatz gilt: $\oint_{\Gamma_R} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum$ eingeschlossenen Residuen

Es sind also nur die Residuen in der oberen Halbebene aufzusummieren.

Offensichtlich gilt:
$$\oint_{\Gamma_R} f = \int_{\gamma_R} f + \int_{\beta_R} f \qquad (*)$$

Nach der Standardabschätzung gilt:
$$\left| \int_{\beta_R} f(z)\,dz \right| \leq \pi \cdot R \cdot \underbrace{\left| \max_{t\in[0,\pi]} f(e^{it}) \right|}_{\text{z.B.} \sim \frac{1}{R^2}}$$

Wenn die Funktion also echt schneller als $\frac{1}{R}$ im Unendlichen abfällt, wird das Integral immer kleiner:
$$\left| \int_{\beta_R} f(z)\,dz \right| \leq \text{const.} \frac{R}{R^2} = \text{const.} \frac{1}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0. \quad (**)$$
R^2 ← z.B.

Im Grenzwert $R\to\infty$ gilt also:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \overset{(*)}{=} \lim_{R\to\infty} \left[\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz - \int_{\beta_R} f(z)\,dz \right]$$

$$\stackrel{(**)}{=} \lim_{R \to \infty} \oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz$$

$$\stackrel{\text{Residuensatz}}{=} 2\pi i \cdot \sum \left(\begin{array}{c} \text{Residuen in der oberen} \\ \text{Halbebene !} \end{array} \right)$$

(a) $\text{Res}_{z=i} f(z)\, dz = \frac{1}{2i}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \underline{\pi}$$

(b) $\text{Res}_{z=\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}} f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)}$

$\text{Res}_{z=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}} f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi}$$

(c) $\text{Res}_{z=i} f(z) = \frac{-2}{(i+i)^3}$ (zweifache Nullstelle !)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \underline{\frac{\pi}{2}}$$